

MEKANIKA STATISTIK

Prof. Dr. Mikrajuddin Abdullah
Program Studi Fisika



FMIPA

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Bandung

MEKANIKA STATISTIK

Mikrajuddin Abdullah
Program Studi Fisika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Bandung
Bandung, 2017

Cetakan 1, 2017

Hak Cipta dilindungi undang-undang

All Rights Reserved

@Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam ITB

Dilarang mengutip atau memperbanyak sebagian atau seluruh isi buku ini tanpa izin tertulis dari Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam ITB

Hak cipta pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam ITB, 2017

Data katalog dalam terbitan

ABDULLAH, MIKRAJUDDIN

Mekanika Statistik

Oleh Mikrajuddin Abdullah. - Bandung.

Penerbit Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam ITB, 2017

Labtek VIII Lantai 1

Jl. Ganesa 10 Bandung

Telp.: 022 2515032, Fax.: 022 2502360

<http://www.fmipa.itb.ac.id>

Kata Pengantar

Pengalaman selama sekitar 10 tahun memberikan kuliah Mekanika Statistik untuk Mahasiswa Magister dan Doktor di Institut Teknologi Bandung bahwa mata ini yang merupakan mata kuliah wajib termasuk yang cukup sulit dipahami para mahasiswa. Hal ini tidak dapat dipungkiri karena memang materi yang terkandung di dalamnya lebih banyak yang bersifat abstrak. Diperlukan abstraksi yang tinggi untuk dapat memahami bab-bab yang ada dalam kuliah tersebut.

Kesulitan makin bertambah akibat cara pembahasan di sejumlah buku yang ada terlalu global sehingga ada beberapa bagian yang memerlukan pemikiran ekstra untuk dapat memahaminya. Buku acuan utama kuliah ini di antaranya *Statistical Mechanics* tulisan K. Huang atau buku klasik *Statistical Mechanics* tulisan J.E. Mayer dan M.G. Mayer. Namun, materi yang dipaparkan dalam buku tersebut perlu dicermati dan direnungi secara mendalam agar dapat memahaminya. Tidak saja mahasiswa, tetapi dosen juga perlu kerja keras untuk memahami mater-materi tersebut.

Atas pengalaman mengajar sekitar 10 tahun saya mencoba menyusun draft sedikit-demi sedikit dan dicobakan ke mahasiswa tiap semester. Penambahan, koreksi, dan penyesuaian dengan cara tangkap mahasiswa menghasilkan naskah seperti ini. Beberapa bagian yang tidak dijelaskan detail di buku-buku yang ada akan dipaparkan secara detail di buku ini sehingga mudah dipahami mahasiswa. Beberapa ilustrasi yang tidak dijumpai pada buku-buku sebelumnya dimasukkan dalam buku ini untuk memepermudah pemahaman. Versi awal draft ini telah muncul dalam bentuk diktat kuliah yang diterbitkan Penerbit ITB dan menjadi salah satu pegangan utama mahasiswa magister dan doktor fisika ITB.

Dalam buku ini, beberapa topik yang rumit yang dibahas di buku-buku Mekanika Statistik yang sudah ada tidak dimasukkan. Harapannya adalah mahasiswa memahami dasar-dasar Mekanika Statistik dan tidak terganggu oleh sejumlah topik yang memerlukan pemahaman matematika yang cukup tinggi. Mahasiswa yang tertarik mempelajari lebih mendalam sangat dianjurkan mempelajari buku-buku teks yang sudah ada, seperti yang disebutkan di atas.

Di bagian awal tiap bab dijelaskan sejumlah persyaratan yang diperlukan untuk memahami tiap bab tersebut secara lebih mudah. Mempelajari tiap bab dari buku ini menuntun pemahaman materi kuliah tingkat sebelumnya seperti Fisika Matematika, Fisika Statistik, Termodinamika, dan sedikit Fisika Kuantum. Mahasiswa sangat diharapkan untuk mereview kembali materi-materi tersebut.

Penyelesaian buku ini tidak lepas dari bantuan dari Kementerian Riset dan Pendidikan Tinggi berupa Hibah Penulisan Buku Teks 2015. Oleh karena itu ucapan terima kasih penulis sampaikan pada Kemenristekdikti. Penulis juga sampaikan ucapan terima kasih kepada Agus Purwanto, D.Sc. dari Jurusan Fisika Institut Teknologi Sepuluh November, Surabaya atas kesediaan menjadi pendamping. Sejumlah saran dan komentar sangat berguna bagi perbaikan isi buku ini. Kepada Pimpinan FMIPA ITB yang telah memfasilitasi penerbitan buku ini penulis sampaikan terima kasih sebesar-besarnya.

Semoga buku ini menjadi salah satu acuan yang berguna bagi mahasiswa magister maupun doktor fisika di Indonesia. Tentu kekurangan masih banyak dijumpai. Perbaikan terus menerus akan tetap diperlukan. Oleh karena itu masukan dan sarat dari para mahasiswa, rekan dosen, atau pembaca lainnya sangat diharapkan.

Bandung, Juni 2016

Penulis

Daftar Isi

Bab 1 Pengenalan Ensemble	1
1.1 Pendahuluan	1
1.2 Dinding Assembli yang Transparan Terhadap Energi	2
1.3 Konsep Ensemble	4
1.4 Assembli Terbuka	7
1.4 Jenis-Jenis Ensemble	9
Bab 2 Ensemble Kanonik	10
2.1 Probabilitas Kemunculan Assembli	11
2.2 Sifat-Sifat Termodinamika	13
2.3 Energi Bebas Helmholtz	16
2.4 Ungkapan lain Entropi	19
2.5 Fungsi Partisi Kanonik Klasik	20
2.6 Fungsi Partisi Kanonik Semiklasik	29
2.7 Formulasi Kanonik Gas Tidak Ideal	33
2.8 Persamaan Keadaan Gas Tidak Ideal	44
2.9 Fluktuasi Energi Assembli	48
Latihan	42

Bab 3	Ensembel Grand Kanonik	47
3.1	Energi Bebas Helmholtz dan Gibbs	57
3.2	Penurunan Besaran Termodinamika dari Entropi	59
3.3	Fungsi Grand Partisi	60
3.4	Ungkapan Alternatif	63
3.5	Entropi dalam Ungkapan Probabilitas	63
3.6	Besaran Termodinamika dari Fungsi Grand Partisi	64
3.7	Perhitungan Fungsi Grand Partisi	66
3.8	Fluktuasi Jumlah Sistem dalam Assembli	81
3.9	Penurunan Fungsi Fermi-Dirac dengan Metode Perturbasi	83
Bab 4	Mekanika Statistik Kuantum	87
4.1	Fungsi Gelombang Sistem dan Lingkungan	87
4.2	Nilai Rata-Rata	88
4.3	Postulat Mekanika Statistik Kuantum	90
4.4	Matriks Kerapatan	91
4.5	Ensembel Mikrokanonik	93
4.6	Ensembel Kanonik dan Grand Kanonik	94
4.7	Metode Operator	96
4.8	Formulasi Alternatif	104
4.9	Kondensasi Boson dan Non Kondensasi Fermion	106
4.10	Tekanan Gas Kuantum Ideal	108
4.11	Persaman Gerak Matriks Kerapatan	111
4.12	Persamaan Kerapatan Sistem Bebas	113

4.13 Persamaan Kerapatan Sistem Osilator Harmonik	116
Bab 5 Gas Fermi Ideal	120
5.1 Persamaan Keadaan	120
5.2 Aplikasi Suhu Tinggi dan Kerapatan Rendah	129
5.3 Aplikasi Suhu Rendah dan Kerapatan Tinggi	131
5.4 Teori Bintang Katai Putih	132
5.5 Diamagnetisme Landau	153
5.6 Efek de Hass-Van Alphen	166
5.7 Paramagnetisme Pauli	172
Bab 6 Gas Bose Ideal	186
6.1 Persamaan Keadaan Boson	186
6.2 Kondensasi Bose-Einstein	193
6.3 Tekanan Radiasi	197
6.4 Sifat Termal Fonon	203
6.5 Radiasi Benda Hitam untuk Foton dan Neutrino	209
Latihan	213
Bab 7 Ekspansi Kluster	216
7.1 Pendahuluan	216
7.2 Penurunan Fungsi Partisi	218
Bab 8 Model Ising	232
8.1 Formulasi Ising	232
8.2 Aproksimasi Bragg-Williams	237
8.3 Aproksimasi Bethe-Pierls	243

8.4 Model Ising Satu Dimensi	254
Latihan	266
Baftar Pustaka	268
Indeks	269

Bab 1

PENGENALAN ENSEMBEL

Bab ini berisi penjelasan tentang ensemble sebagai kumpulan dari sejumlah assembly. Ensemble dapat dipandang sebagai super assembly yang anggotanya adalah assembly-assembly. Sedangkan assembly sendiri beranggotakan sistem-sistem. Tujuan bab ini adalah memberi pemahaman kepada mahasiswa tentang definisi ensemble, mengapa konsep ensemble diperlukan, dan mengenal ciri masing-masing ensemble dalam mekanika statistik: *mikrokanonik*, *kanonik*, dan *grand kanonik*. Namun demikian, bab ini tidak terlalu sulit untuk dipahami, karena hanya berisi pengenalan tentang konsep ensemble itu sendiri. Dengan demikian tidak ada kemampuan awal khusus yang diperlukan untuk memahami penjelasan dalam bab ini.

1.1 Pendahuluan

Assembly yang telah kita bahas di kuliah Fisika Statistik memiliki kriteria yang sangat ketat, yaitu energi yang dimiliki assembly maupun jumlah sistem dalam assembly selalu tetap. Dalam dunia nyata mungkin assembly demikian sulit diwujudkan. Assembly semacam ini dapat didekati oleh satu wadah yang terisolasi rapat dari bahan isolator panas yang sangat tebal, tidak ada medan magnet, medan listrik, bahkan medan gravitasi yang dirasakan sistem-sistem dalam assembly. Jadi, pada prinsipnya, assembly yang telah kita bahas selama ini merupakan sebuah pendekatan untuk kondisi nyata. Pendekatan tersebut tentu mengandung sejumlah kekurangan. Namun untuk dinding assembly yang terbuat dari bahan isolator yang sangat baik, kekurangan yang dihasilkan tidak terlalu signifikan.

Apabila kita ingin masuk ke kondisi yang lebih mendekati keadaan nyata, maka pembatasan yang sangat ketat harus diperlonggar. Kalau kita menempatkan sistem-sistem dalam wadah tertutup maka peluang sistem untuk keluar dari dan masuk ke dalam wadah masih dapat dihindari. Dengan demikian pembatasan jumlah sistem yang konstan bukanlah asumsi yang dibuat-buat. Tetapi untuk energi total yang dimiliki assembly, pembatasan bahwa energi assembly adalah konstan

mungkin dapat dilanggar. Tidak ada dinding wadah yang benar-benar sanggup meniadakan pertukaran energi secara sempurna, apalagi jika wadah yang kita miliki terbuat dari bahan konduktor. Lebih lanjut, kadang assembli yang kita miliki tidak dibatasi oleh dinding, tetapi melakukan kontak langsung dengan udara terbuka. Sebagai contoh, assembli kita adalah sebatang logam yang berada di udara terbuka. Jumlah sistem dalam assembli tersebut selalu tetap (karena atom-atom atau elektron tidak dapat meninggalkan logam), namun energi sangat mudah bertukaran antara batang logam dan udara luar. Untuk menjelaskan mekanisme yang terjadi dalam assembli yang memiliki dinding yang transparan terhadap energi, para ahli juga mengembangkan statistik untuk assembli yang memiliki jumlah sistem konstan tetapi jumlah energi tidak konstan.

Kasus yang lebih umum lagi adalah untuk assembli terbuka seperti udara yang ada di sekitar kita. Kita bahkan tidak memiliki wadah sama sekali. Kondisi ini dapat diasumsikan sebagai assembli yang dibatasi oleh wadah yang dapat ditembus oleh sistem maupun oleh energi. Implikasinya adalah jumlah sistem maupun energi total yang dimiliki assembli tidak tetap.

1.2 Dinding Assembli yang Transparan terhadap Energi

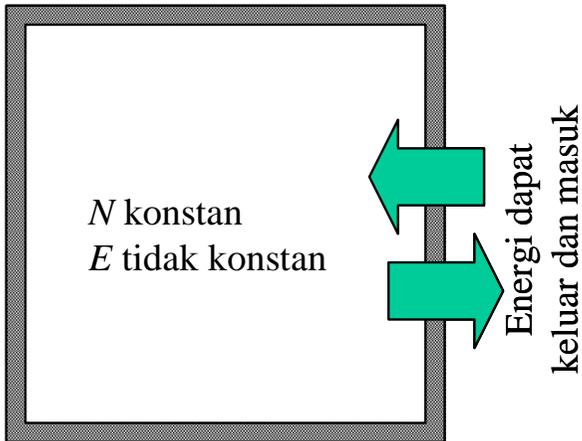
Sejauh ini kita telah merumuskan panjang lebar tentang assembli yang dibatasi dinding yang tidak transparan terhadap sistem maupun energi. Pertanyaannya adalah bagaimana bentuk perumusan untuk assembli yang dibatasi dinding yang sifatnya lebih longgar, yaitu dapat ditembus energi namun tidak dapat ditembus sistem?

Perhatikan sebuah assembli dengan jumlah sistem tetap tetapi energi yang dimiliki dapat berubah-ubah (**Gambar. 1.1**). Assembli tersebut memiliki dinding yang transparan terhadap energi tetapi tidak transparan terhadap sistem. Contoh dinding tersebut adalah logam. Karena dinding dapat ditembus energi maka pada saat yang berbeda, energi yang dimiliki assembli mungkin berbeda. Misalkan energi yang dimiliki assembli pada saat yang berbeda-beda diilustrasikan pada **Tabel 1.1**.

Untuk kondisi dengan energi yang dimiliki assembli berubah-ubah bagaimana cara mendapatkan persamaan keadaan assembli? Kita lakukan strategi sebagai berikut:

- 1) Pada saat yang berbeda bisa saja terjadi bahwa energi yang dimiliki assembli kembali sama. Contohnya, bisa saja terjadi bahwa pada saat t_1 dan t_7 energi yang dimiliki assembli sama, yaitu $E_1 = E_7$.
- 2) Untuk mudahnya kita urutkan energi yang dapat dimiliki assembli dari nilai terkecil hingga terbesar sebagai berikut $E_1, E_2, E_3, \dots, E_\infty$.

- 3) Assembli akan memiliki energi yang berbeda-beda tersebut dalam durasi waktu yang berbeda-beda pula. Misalkan lama assembli memiliki energi E_1 adalah Δt_1 , lama assembli memiliki energi E_2 adalah Δt_2 , dan seterusnya.



Gambar 1.1 Dinding assembli transparan terhadap energi tetapi tidak transparan terhadap sistem. Sistem tidak dapat keluar atau masuk dari/ke dalam assembli sehingga jumlah sistem dalam assembli selalu konstan. Namun energi dapat menembus dinding assembli. Energi dapat keluar atau masuk dari/ke dalam assembli sehingga energi assembli tidak tetap.

Tabel 1.1 Energi assembli berbeda-beda pada saat yang berbeda. Namun tidak menutup kemungkinan bahwa pada saat berbeda nilai energi sama (energi yang semula telah dimiliki muncul kembali).

Saat	Energi yang dimiliki
t_1	E_1
t_2	E_2
.	.
.	.
.	.
t_∞	E_∞

- 4) Dengan demikian probabilitas assembli memiliki energi-energi di atas menjadi:

a) probabilitas memiliki energi E_1 :
$$p(E_1) = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots + \Delta t_\infty} ;$$

b) probabilitas memiliki energi E_2 :
$$p(E_2) = \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots + \Delta t_\infty} ;$$

.

.

.

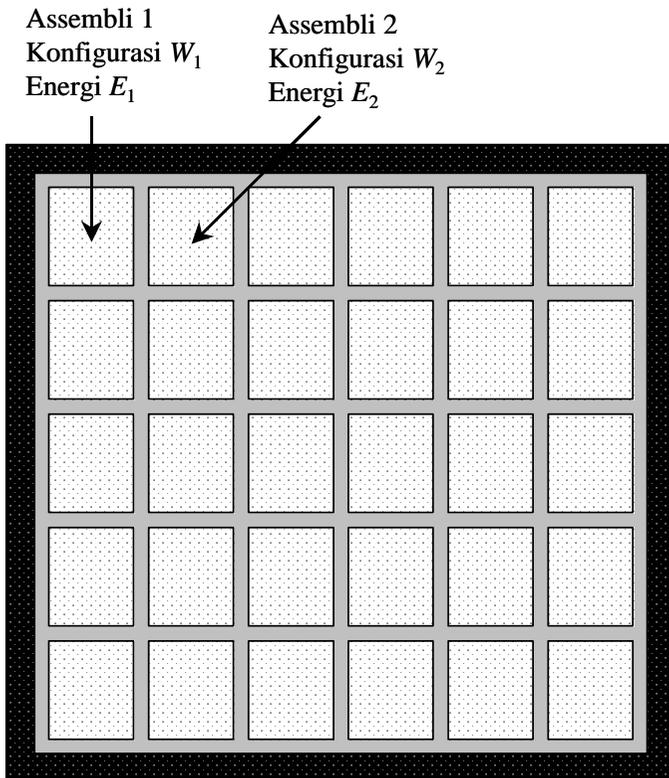
c) probabilitas memiliki energi E_∞ :
$$p(E_\infty) = \frac{\Delta t_\infty}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots + \Delta t_\infty} .$$

- 5) Karena kita tidak dapat mengetahui dengan pasti berapa Δt_1 , Δt_2 , dan seterusnya maka diasumsikan bahwa $p(E_i) \propto \exp[-E_i/kT]$. Asumsi ini diinspirasi oleh fungsi distribusi Maxwell-Boltzmann bahwa peluang mendapatkan sistem pada tingkat energi ε_i sebanding dengan $\exp[-\varepsilon_i/kT]$. Asumsi ini dapat diterima secara logis; bahwa makin besar energi yang dimiliki assembli maka makin kecil peluang menemukan assembli tersebut. Jika energi assembli tak berhingga maka peluang menemukan assembli menjadi nol. Dengan kata lain tidak ada assembli yang memiliki energi tak berhingga.
- 6) Probabilitas di atas didukung juga oleh alasan berikut ini. Misalkan ada dua assembli dengan energi E_i dan E_j . Peluang mendapatkan masing-masing assembli adalah $p(E_i) \propto \exp[-E_i/kT]$ dan $p(E_j) \propto \exp[-E_j/kT]$. Jika dua assembli digabung menjadi satu assembli yang besar maka peluang menemukan assembli tersebut menjadi $p(E_i)p(E_j)$. Tetapi, saat dua assembli digabung maka energinya menjadi E_i+E_j . Dengan demikian peluang menemukan assembli dengan energi gabungan tersebut adalah $p(E_i+E_j) \propto \exp[-(E_i+E_j)/kT] \propto \exp[-E_i/kT] \exp[-E_j/kT] = p(E_i)p(E_j)$, sesuai dengan perkalian probabilitas yang sudah kita sebutkan di atas.

1.3 Konsep Ensemble

Apa yang kita bahas di atas adalah satu assembli saja yang memiliki sejumlah kemungkinan energi. Energi yang berbeda dapat muncul pada saat yang berbeda. Kita dapat juga menjelaskan kondisi ini dari sudut pandang yang berbeda tetapi memiliki hasil akhir yang setara. Kita seolah-olah memiliki sejumlah besar assembli di mana jumlah sistem pada semua assembli sama tetapi energi yang dimiliki satu assembli dengan assembli lain dapat berbeda. Untuk satu assembli tertentu, jumlah sistem dan energi yang dimilikinya selalu tetap. Lebih tegas lagi, seolah-olah kita memiliki sejumlah besar assembli di mana jumlah sistem dalam

tiap-tiap assembli sama, yaitu N tetapi energinya bisa berbeda-beda. Semua konfigurasi yang mungkin dilakukan bagi penyusunan sistem-sistem dalam assembli ada wakilnya dalam kelompok assembli tersebut. Apa yang kita miliki dapat diilustrasikan pada **Gambar. 1.2**.

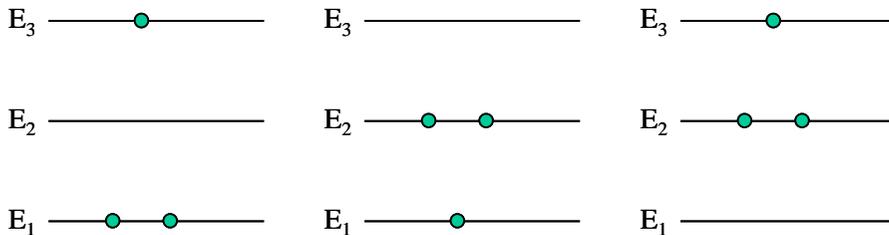


Gambar 1.2 Ensemble adalah kumpulan assembli. Tiap assembli memiliki jumlah sistem dan energi yang tetap. Tetapi jumlah sistem yang dimiliki masing-masing assembli sama sedangkan besar energi berbeda antara satu assembli dengan assembli lain. Contoh sederhana assembli ini adalah sampel batang logam. Jumlah atom dalam batang logam tetap tetapi energi dapat keluar atau masuk dari batang logam.

Semua assembli tersebut digabung dalam satu wadah besar (super assembli). Jumlah assembli dalam super assembli tetap dan energi total super assembli juga tetap. Super assembli semacam ini dinamakan **ensemble**.

Sebagai ilustrasi adalah kampus. Kampus dapat kita analogikan sebagai ensemble. Kelas-kelas dalam kampus dianalogikan sebagai assembli. Mahasiswa yang duduk dalam kelas-kelas dapat dianalogikan sebagai sistem. Jumlah mahasiswa pada tiap kelas semuanya sama. Namun, energi total yang dimiliki mahasiswa berbeda antara satu kelas dengan kelas lainnya. Untuk mencari sifat rata-rata satu kelas kita dapat lakukan dengan dua cara. Cara pertama adalah mengukur sifat satu kelas dalam jangka waktu yang lama lalu merata-ratakan hasil yang diperoleh. Cara kedua adalah mengukur sifat semua kelas secara serentak lalu merata-ratakan sifat tersebut. Cara pertama hanya memperhatikan satu kelas kemudian melakukan perata-rataan terhadap waktu. Cara kedua memperhatikan seluruh kelas kemudian merata-ratakan terhadap jumlah. Secara statistik, hasil yang diperoleh sama.

Dalam ensemble yang diilustrasikan pada **Gambar 1.3**, konfigurasi yang berbeda dalam menyusun sistem-sistem dalam assembli dapat menghasilkan energi yang berbeda dan dapat pula memiliki energi yang sama. Sebagai ilustrasi, kita misalkan $E_1 = 0$, $E_3 = 2E_2$. Energi yang dimiliki adalah konfigurasi: (kiri) $E_3 + 2E_1 = 2E_2$ (tengah) $E_1 + 2E_2 = 2E_2$ dan (kanan) $2E_2 + E_3 = 4E_2$.



Gambar 1.3 Tiga konfigurasi di atas semuanya berbeda. Namun energi yang dimiliki adalah: (kiri) $E_3 + 2E_1 = 2E_2$ (tengah) $E_1 + 2E_2 = 2E_2$ dan (kanan) $2E_2 + E_3 = 4E_2$. Tampak bahwa konfigurasi yang berbeda dapat memiliki energi yang sama. Karena jumlah tingkat energi dalam assembli sangat banyak bahkan akan banyak sekali konfigurasi yang memiliki energi yang sama.

Konfigurasi penyusunan sistem dalam tiga assembli di atas berbeda. Tetapi energi assembli 1 sama dengan energi assembli 2 dan berbeda dengan energi assembli 3. Peluang munculnya assembli dengan energi yang berbeda tentu saja

berbeda. Kita kemukakan hipotesis bahwa peluang mendapatkan assembli dengan energi E_i diberikan oleh

$$p(E_i) \propto e^{-E_i/kT} \quad (1.1)$$

1.4 Assembli Terbuka

Jika kita melihat udara atau atmosfer maka tampak bahwa tidak ada wadah pembatas seperti yang kita bahas pada bab-bab sebelumnya. Bagaimana kita dapat menggunakan statistik untuk menjelaskan sifat-sifat gas di udara?

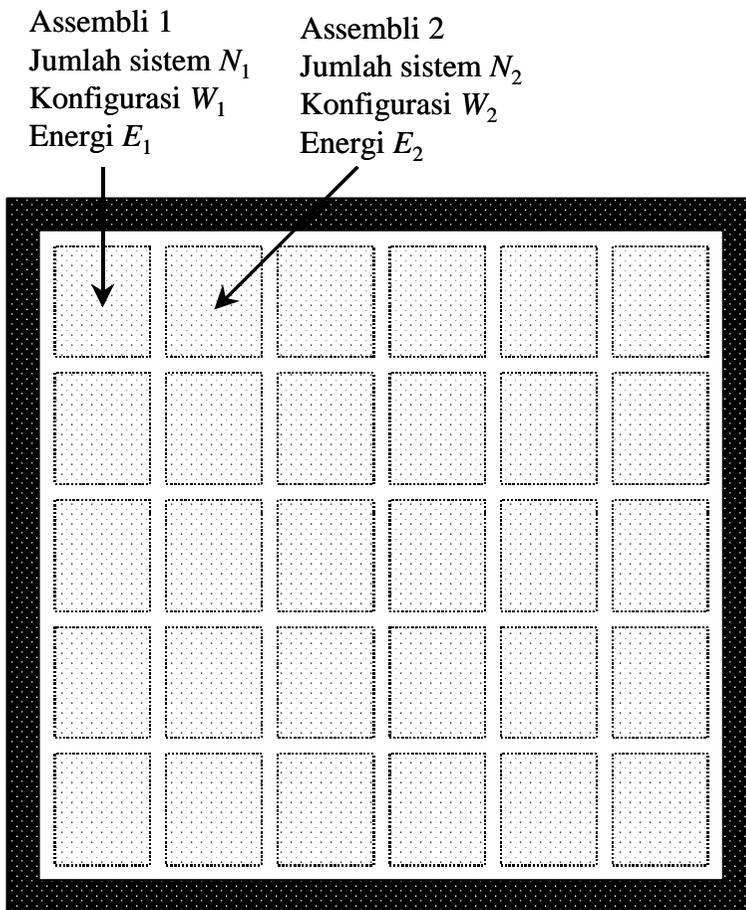
Kita dapat mengansumsikan bahwa di udara terdapat sejumlah besar wadah (assembli) tetapi wadah tersebut dapat ditembus energi maupun sistem. Jadi jumlah energi maupun jumlah sistem yang dimiliki assembli tersebut dapat berubah-ubah. Untuk menjelaskan sifat-sifat assembli semacam ini, kita bangun sebuah ensemble yang mengandung sejumlah besar assembli di mana assembli yang berbeda dapat memiliki jumlah sistem yang berbeda maupun jumlah energi yang berbeda pula (**Gambar. 1.4**).

Untuk ensemble semacam ini, peluang mendapatkan assembli ke- i dengan energi tertentu (E_i) tidak hanya ditentukan E_i , tetapi juga ditentukan oleh N_i . Meskipun energi dua assembli sama tetapi jumlah sistemnya berbeda maka probabilitas kemunculan dua assembli tersebut dapat berbeda. Bagaimana bentuk probabilitas tersebut?

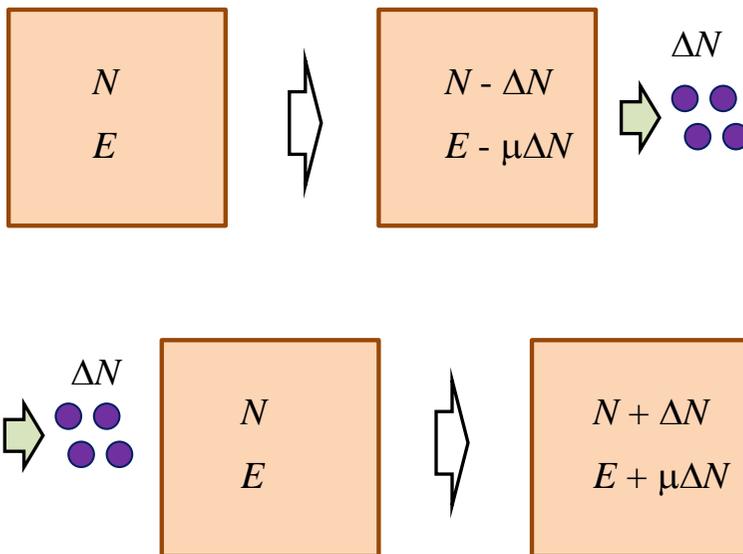
Dalam kuliah termodinamika kita mempelajari bahwa penambahan/pengurangan satu partikel dalam sistem termodinamika melahirkan penambahan/pengurangan energi sebesar μ di mana μ disebut potensial kimia. Penambahan/pengurangan sebanyak ΔN partikel menghasilkan penambahan/pengurangan energi sebesar $\mu\Delta N$ (**Gambar 1.5**). Dengan demikian kita dapat menyimpulkan bahwa jumlah sistem yang terdapat dalam assembli akan mempengaruhi energi yang dimiliki assembli tersebut yang pada akhirnya menentukan peluang kemunculan assembli yang bersangkutan. Akhirnya sangat logis apabila kita berhipotesis bahwa probabilitas kemunculan assembli dengan energi E_i dan mengandung sebanyak N_i sistem memenuhi

$$p(N_i, E_i) \propto e^{-(E_i + \xi N_i + \eta)/kT} \quad (1.2)$$

dengan ξ dan η adalah parameter-parameter yang harus ditentukan. Persamaan (1.2) kembali ke bentuk probabilitas menemukan assembli kanonik dengan energi E_i jika jumlah sitem pada semua assembli nonstan ($N_i = N$ untuk semua i).



Gambar 1.4 Sebuah ensemble mengandung anggota berupa assembli terbuka. Tiap assembli tidak memiliki sekat (pembatas) sehingga sistem maupun energi dapat berpindah dari satu assembli ke assembli lainnya. Contoh ensemble ini adalah udara terbuka. Udara terbuka dapat dipandang sebagai kumpulan atom atau molekul yang berada dalam kotak-kotak yang memiliki dinding yang dapat ditembus oleh energi dan sistem (magnanya tidak memiliki dinding). Dinding di sini hanyalah dinding virtual supaya konsep sebuah assembli memiliki dinding pembatas masih digunakan. Setiap saat jumlah sistem maupun energi dalam satu assembli dapat berubah-ubah. Dengan sifat ini jelas bahwa pembahasan tentang assembli lebih rumit dari assembli lainnya (assembli dengan energi dan jumlah sistem konstan atau assembli dengan sistem konstan tetapi energi tidak konstan).



Gambar 1.5 (atas) Jika ada ΔN sistem yang keluar dari assempli maka energi assempli berkurang sebesar $\mu\Delta N$. (bawah). Jika ada ΔN sistem yang masuk ke dalam assempli maka energi assempli bertambah sebesar $\mu\Delta N$. Ini berimplikasi bahwa kebolehjadian menemukan assempli bergantung pada energi dan jumlah sistem yang dimiliki assempli tersebut.

1.5 Jenis-Jenis Ensemble

Dari semua pembahasan di atas kita akhirnya dapat membedakan tiga jenis ensemble berdasarkan sifat dinding assempli-assempli penyusun ensemble tersebut.

Ensemble Kanonik

Jika assempli-assempli penyusun ensemble tersebut memiliki dinding yang tidak dapat ditembus sistem tetapi dapat ditembus energi maka ensemble tersebut dinamakan *ensemble kanonik*. Dalam ensemble ini jumlah sistem dalam semua assempli sama banyaknya tetapi energi yang dimiliki assempli dapat berbeda-beda. Namun jumlah total assempli dalam ensemble dan jumlah total energi yang dimiliki ensemble adalah konstan.

Ensemble Grand Kanonik

Jika assembli-assembli penyusun ensemble memiliki dinding yang dapat ditembus sistem maupun energi maka ensemble yang dibentuk dinamakan *ensemble grand kanonik*. Pada ensemble ini jumlah sistem maupun jumlah energi yang dimiliki satu assembli dapat berbeda dengan yang dimiliki assembli lainnya. Namun jumlah total assembli dalam ensemble dan jumlah total energi yang dimiliki ensemble adalah konstan.

Ensemble Mikrokanonik

Jika assembli-assembli penyusun ensemble tidak dapat ditembus sistem maupun energi dan jumlah energi maupun jumlah sistem dalam tiap assembli semua sama maka ensemble yang dibentuk dinamakan *ensemble mikrokanonik*. Karena semua assembli identik maka untuk mempermudah pembahasan kita cukup meninjau satu assembli saja dan menentukan konfigurasi penyusunan sistem-sistem dalam satu assembli seperti yang dipelajari di kuliah Fisika Statistik. Karena sifatnya yang demikian maka penurunan fungsi keadaan untuk assembli mikrokanonik umumnya tidak dilakukan melalui konsep ensemble, tetapi cukup pada level assembli saja. Dengan kata lain, kita umumnya tidak mengenalkan konsep ensemble untuk membahas assembli mikrokanonik.

Bab 2

ENSEMBEL KANONIK

Bab ini berisi diskusi tentang ensemble kanonik. Selama ini statistik yang kita bahas pada kuliah Fisika Statistik hanya dibatasi pada statistik sebuah ensemble yang memiliki syarat batas ketat, yaitu jumlah sistem dan energi konstan. Mulai sekarang kita akan memperlonggar persyaratan tersebut dengan memperkenalkan konsep ensemble. Khusus pada bab ini kita akan bahas ensemble kanonik di mana persyaratan energi ensemble yang konstant tidak diterapkan. Kita hanya mempertahankan persyaratan bahwa jumlah sistem yang dimiliki ensemble konstan.

Tujuan bab ini adalah mahasiswa memahami konsep ensemble, khususnya ensemble yang dibentuk oleh ensemble-ensemble klasik yang memenuhi statistik Maxwell-Boltzmann. Pembahasan difokuskan pada ensemble kanonik di mana energi ensemble tidak konstan. Setelah itu mahasiswa diharapkan dapat menerapkan konsep tersebut untuk menurunkan besaran-besaran termodinamika gas klasik.

Memahami seluruh topik yang dipelajari di kuliah Fisika Statistik sangat penting untuk memudahkan pemahaman isi bab ini. Mahasiswa dianjurkan mereview kembali materi kuliah tersebut, khususnya bagaimana menurunkan distribusi Maxwell-Boltzmann dan bagaimana mendapatkan besaran termodinamika dari fungsi partisi.

2.1 Probabilitas Kemunculan Ensemble

Seperti disebutkan sebelumnya bahwa ensemble kanonik disusun oleh sejumlah ensemble dengan energi yang bermacam-macam. Kita mulai menurunkan

persamaan-persamaan yang berkaitan dengan ensemble kanonik.

Mari kita tinjau assembli ke- i yang merupakan salah satu elemen dari ensemble kanonik yang akan kita bahas. Misalkan energi assembli tersebut adalah E_i . Probabilitas kemunculan assembli dengan energi E_i tersebut dapat ditulis

$$p_i \propto e^{-E_i/kT} \quad \text{atau} \quad p_i = C e^{-E_i/kT} \quad (2.1)$$

dengan C adalah konstanta normalisasi yang bergantung pada suhu. Karena jumlah total probabilitas kemunculan semua assembli adalah 1 atau $\sum_i p_i = 1$, maka $\sum_i C \exp[-E_i/kT] = C \sum_i \exp[-E_i/kT] = 1$. Hasil ini memberikan bentuk ungkapan untuk C sebagai berikut

$$C = \frac{1}{\sum_i e^{-E_i/kT}} = \frac{1}{Z_C} \quad (2.2)$$

di mana

$$Z_C = \sum_i e^{-E_i/kT} \quad (2.3)$$

Dengan menggunakan persamaan (2.1) dan (2.2) kita dapatkan ungkapan lengkap untuk p_i sebagai berikut

$$p_i = \frac{e^{-E_i/kT}}{Z_C} \quad (2.4)$$

Perlu dicermati bahwa pada persamaan (2.4) E_i adalah energi total semua partikel dalam sebuah assembli dan p_i adalah peluang kemunculan assembli tersebut. Bentuk serupa juga dijumpai pada partikel dalam assembli di mana probabilitas munculnya sistem dengan energi ε_j di dalam suatu assembli memenuhi $p_j \propto \exp[-\varepsilon_j/kT]$.

2.2 Sifat-Sifat Termodinamika

Setelah kita formulasikan probabilitas kemunculan assembli dalam ensemble kanonik, selanjutnya mari kita bahas besaran-besaran termodinamika dalam konsep ensemble kanonik. Pertama kita menghitung energi rata-rata yang dimiliki assembli. Assembli yang berbeda memiliki energi berbeda, walaupun tidak menutup kemungkinan memiliki energi yang sama. Tetapi ada satu nilai energi rata-rata yang dimiliki semua assembli. Perata-rataan dilakukan pada semua assembli dalam ensemble kanonik. Energi rata-rata assembli memenuhi hubungan

$$\begin{aligned} E &= \sum_i E_i p_i \\ &= \frac{1}{Z_C} \sum_i E_i e^{-E_i/kT} = \frac{1}{Z_C} \sum_i E_i e^{\beta E_i} = \frac{1}{Z_C} \sum_i \frac{\partial}{\partial \beta} e^{\beta E_i} \\ &= \frac{1}{Z_C} \frac{\partial}{\partial \beta} \sum_i e^{\beta E_i} = \frac{1}{Z_C} \frac{\partial}{\partial \beta} Z_C \\ &= \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_C \end{aligned} \tag{2.5}$$

di mana $\beta = -1/kT$. Dari definisi β maka kita dapat menulis $T = -1/k\beta$ sehingga $\partial/\partial\beta = \partial T/\partial\beta \partial/\partial T = (1/k\beta^2)\partial/\partial T = kT^2\partial/\partial T$. Dengan demikian energi rata-rata assembli pada persamaan (2.5) dapat ditulis menjadi

$$E = kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln Z_C \tag{2.6}$$

Perlu diperhatikan bahwa pada persamaan (2.6), parameter Z_C dihitung pada energi assembli, bukan pada energi sistem.

Contoh 2.1

Sebuah assembli yang disusun oleh N momen magnetik identik berada dalam medan magnet. Energi interaksi momen dengan medan magnet

memenuhi persamaan $-\vec{\mu} \cdot \vec{B}$. Misalkan momen hanya dapat memiliki dua arah orientasi yaitu searah dan berlawanan arah medan magnet. Berapakan energi rata-rata assembly momen tersebut?

Jawab

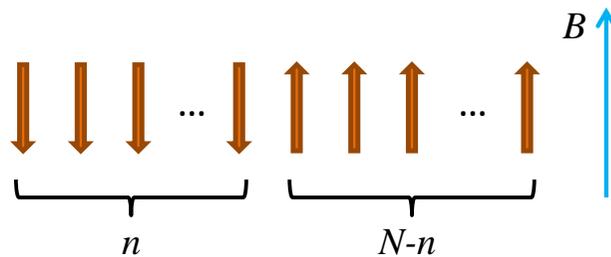
Tiap momen hanya dapat memiliki salah satu energi interaksi berikut ini: $-\mu B$ (searah medan magnet) atau μB (berlawanan arah medan magnet).

Perhatikan **Gambar 2.1**. Misalkan terdapat n momen yang berlawanan dengan arah medan magnet (energi $n\mu B$) dan $N-n$ momen yang searah dengan medan magnet (energi $-(N-n)\mu B$). Energi total assembly tersebut adalah $n\mu B - (N-n)\mu B = 2n\mu B - N\mu B$. Jumlah cara penyusunan n buah momen dalam arah berlawanan medan dan $N-n$ buah momen searah

medan adalah $\frac{N!}{n!(N-n)!}$. Dengan demikian, fungsi partisi kanonik dapat

ditulis sebagai

$$Z_C = \sum_n \frac{N!}{n!(N-n)!} e^{\beta(2n\mu B - N\mu B)} = e^{-N\beta\mu B} \sum_n \frac{N!}{n!(N-n)!} (e^{2\beta\mu B})^n$$



Gambar 2.1 Penyusunan n buah momen berlawanan arah medan magnet dan $N-n$ momen magnet searah medan magnet.

Kita gunakan kesamaan berikut ini $(1+x)^N = \sum_n \frac{N!}{n!(N-n)!} x^n$ sehingga

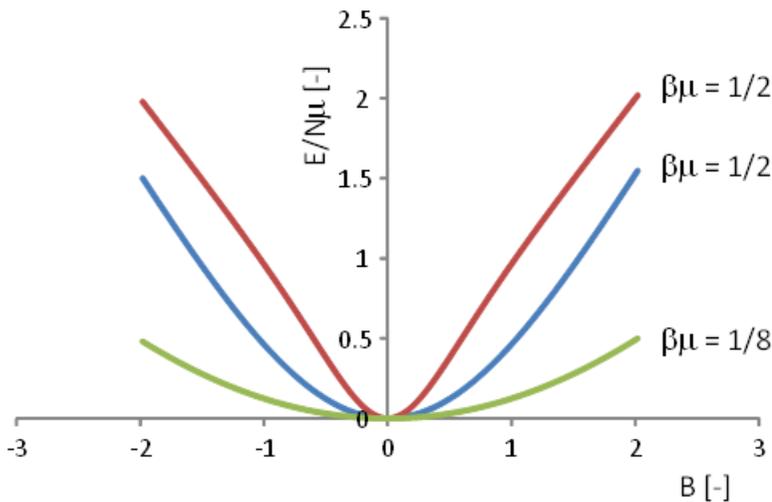
kita dapat menulis

$$Z_C = e^{-N\beta\mu B} (1 + e^{2\beta\mu B})^N$$

Energi rata-rata assembly dihitung dengan persamaan (2.4), yaitu

$$\begin{aligned} E &= \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_C = \frac{\partial}{\partial \beta} \left[-N\beta\mu B + N \ln(1 + e^{2\beta\mu B}) \right] \\ &= -N\mu B + 2N\mu B \frac{e^{2\beta\mu B}}{1 + e^{2\beta\mu B}} = -N\mu B + 2N\mu B \frac{e^{\beta\mu B}}{e^{-\beta\mu B} + e^{\beta\mu B}} \\ &= N\mu B \left[\frac{2e^{\beta\mu B}}{e^{-\beta\mu B} + e^{\beta\mu B}} - 1 \right] = N\mu B \left[\frac{e^{\beta\mu B} - e^{-\beta\mu B}}{e^{-\beta\mu B} + e^{\beta\mu B}} \right] = N\mu B \tanh(\beta\mu B) \end{aligned}$$

Gambar 2.2 adalah kurva energi sebagai fungsi kuat medan magnet luar pada berbagai suhu. Satuan medan magnet maupun satuan suhu yang digunakan adalah sembarang. Tujuan di sini adalah menampilkan bentuk kurva saja sehingga pola perubahan energi dapat diketahui. Tampak bahwa makin besar suhu maka energi magnetik makin kecil.



Gambar 2.2 Energi sebagai fungsi kuat medan magnet luar pada berbagai suhu. Satuan medan magnet maupun satuan suhu yang digunakan adalah sembarang.

2.3 Energi Bebas Helmholtz

Energi bebas Helmholtz didefinisikan sebagai $F = E - TS$. Energi bebas Helmholtz memiliki peranan yang sangat strategis dalam termodinamika. *Semua sistem termodinamika berada pada keadaan setimbang dan keadaan setimbang dicirikan oleh energi Helmholtz paling kecil.* Tampak dari definisi energi Helmholtz bahwa nilai terkecil dicapai jika energi yang dimiliki sekecil mungkin dan entropi sebesar mungkin. Itulah sebabnya, proses termodinamika dapat terjadi secara spontan menuju ke kondisi dengan energi makin kecil dan entropi makin besar. Dengan melakukan diferensial pada dua ruas ungkapan energi Helmholtz kita dapatkan

$$dF = dE - TdS - SdT \quad (2.7)$$

Mari kita melihat hukum I termodinamika, yang juga merupakan hukum kekekalan energi,

$$dE = dQ + dW = dQ - pdV \quad (2.8)$$

Di sini kita mendefinisikan $dW = -pdV$. Untuk proses yang berlangsung secara reversibel maka berlaku $dQ = TdS$. Jika disubstitusikan ke dalam persamaan (2.8) maka kita peroleh

$$dE = TdS - pdV \quad (2.9)$$

Selanjutnya kita substitusi persamaan (2.9) ke dalam persamaan (2.7) sehingga diperoleh bentuk diferensial dari energi bebas sebagai berikut

$$dF = (TdS - pdV) - TdS - SdT = -pdV - SdT \quad (2.10)$$

Setiap besaran termodinamika selalu dapat dinyatakan sebagai fungsi paling sedikit dua besaran termodinamika lainnya. Jika F dinyatakan dalam fungsi

V dan T maka diferensial dari F memenuhi bentuk umum

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V dT \quad (2.11)$$

Apabila kita bandingkan ruas paling kanan persamaan (2.10) dengan persamaan (2.11) maka kita simpulkan hubungan berikut ini

$$-p = \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T \quad (2.12)$$

$$-S = \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V \quad (2.13)$$

Selanjutnya kita substitusi S dari persamaan (2.13) ke dalam ungkapan energi Helmholtz $F = E - TS$ sehingga kita dapat menulis

$$\begin{aligned} F &= E + T \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right) \\ -\frac{E}{T^2} &= -\frac{F}{T^2} + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right) \\ -\frac{E}{T^2} &= \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{F}{T}\right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Masukkan ungkapan E dari persamaan (2.6) ke dalam persamaan (2.14) sehingga didapat

$$-k \frac{\partial}{\partial T} \ln Z_C = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{F}{T}\right)$$

Akhirnya kita memperoleh ungkapan sederhana untuk energi bebas Helmholtz berupa

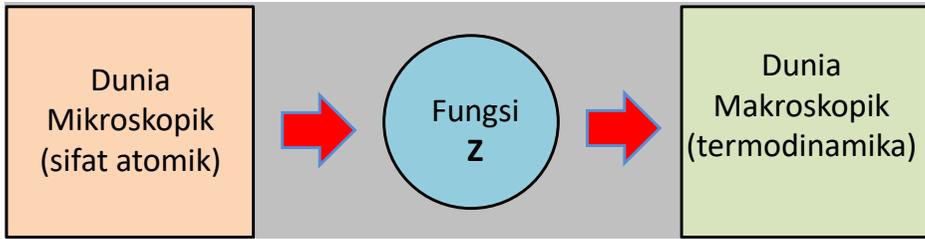
$$F = -kT \ln Z_C \quad (2.15)$$

Tampak bahwa energi bebas Helmholtz merupakan fungsi langsung dari fungsi partisi. Karena entropi dapat diturunkan dari energi bebas Helmholtz maka entropi mestinya dapat diturunkan langsung dari fungsi partisi. Dari persamaan (2.13) dan (2.15) kita dapat menulis bentuk ungkapan untuk entropi sebagai

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V$$

$$= k \ln Z_C + kT \frac{\partial}{\partial T} \ln Z_C \quad (2.16)$$

Catatan: Satu yang luar biasa kita amati dari persamaan (2.6) dan (2.15). Jika kita mengetahui fungsi Z_C maka energi rata-rata assembli dapat dihitung dengan mudah menggunakan persamaan (2.6) dan energi Helmholtz assembli dapat dihitung dengan mudah menggunakan persamaan (2.15). Setelah mengetahui energi bebas Helmholtz (ditentukan dengan mudah dari fungsi Z_C) maka tekanan dan entropi dapat ditentukan dengan mudah dengan bantuan persamaan (2.12) dan (2.13). Sekali kita mengetahui Z_C maka hampir semua besaran termodinamika dapat ditentukan dengan operasi matematika yang cukup sederhana. Oleh karena itulah, ketika berkuat dengan mekanika statistik, langkah pertama yang dilakukan para peneliti adalah mencari ungkapan untuk fungsi Z_C . Boleh dikatakan bahwa inti dari statistik adalah mencari fungsi Z_C . Dengan perkataan lain fungsi Z_C merupakan jembatan penghubung antara dunia mikroskopik (sifat partikel atomik) dan dunia makroskopik (persamaan termodinamika). Hal ini dapat diilustrasikan pada **Gambar 2.3**.



Gambar 2.3. Peranan fungsi Z dalam statistik sebagai jembatan penghubung sifat makroskopik dengan sifat makroskopik (termodinamika).

Contoh 2.2

Tentukan energi bebas Helmholtz dan entropi assembli pada **Contoh 2.1**.

Jawab

Kita sudah menentukan fungsi $Z_C = e^{-N\beta\mu B} (1 + e^{2\beta\mu B})^N$. Dengan

menggunakan persamaan (2.15) kita dapatkan energi bebas Helmholtz

$$\begin{aligned} F &= -kT \ln Z_C = -kT \left[-N\beta\mu B + N \ln(1 + e^{2\beta\mu B}) \right] \\ &= -N\mu B - NkT \ln(1 + e^{-2\mu B/kT}) \end{aligned}$$

Dengan menggunakan persamaan (2.13) maka entropi assembli adalah

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = Nk \ln(1 + e^{-2\mu B/kT}) + \frac{2N\mu B}{T} \frac{e^{-2\mu B/kT}}{1 + e^{-2\mu B/kT}}$$

2.4 Ungkapan Lain Entropi

Di samping dalam bentuk persamaan (2.16), entropi dapat diungkapkan dalam persamaan lain. Kita mulai dari ungkapan energi bebas Helmholtz $F = E - TS$ kita dapat menulis $S = (E - F)/T$. Kita selanjutnya menggunakan definisi awal untuk energi, yaitu $E = \sum_i p_i E$. Mengingat F adalah besaran tanpa indeks dan mengingat

kesamaan $\sum_i p_i = 1$ maka kita dapat menulis $F = F\sum_i p_i = \sum_i Fp_i$. Substitusi ungkapan E dan F ke dalam persamaan entropi maka kita dapat menulis sebagai berikut

$$S = \frac{\sum_i p_i E_i - \sum_i p_i F}{T} = \frac{\sum_i p_i (E_i - F)}{T} = \sum_i p_i \frac{(E_i - F)}{T} \quad (2.17)$$

Persamaan (2.15) dapat ditulis sebagai $Z_C = e^{-F/kT}$. Substitusi hubungan ini ke dalam persamaan (2.4) maka

$$p_i = \frac{e^{-E_i/kT}}{e^{-F/kT}} = e^{(F-E_i)/kT} \quad (2.18)$$

Dengan mengambil logaritma dua sisi persamaan (2.18) kita peroleh

$$\ln p_i = -\frac{E_i - F}{kT} \quad (2.19)$$

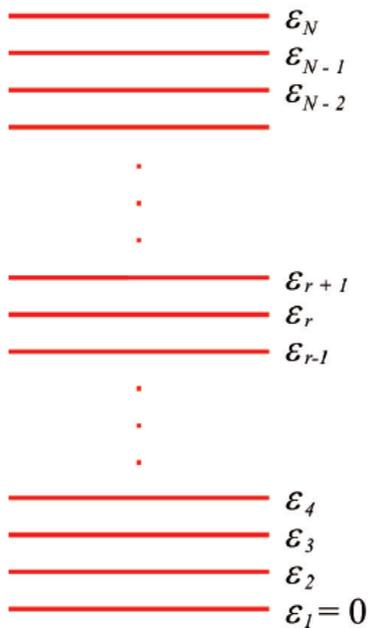
Substitusi persamaan (2.19) ke dalam persamaan (2.17) diperoleh ungkapan lain untuk entropi, yaitu

$$S = \sum_i p_i (-k \ln p_i) \\ = -k \sum_i p_i \ln p_i \quad (2.20)$$

2.5 Fungsi Partisi Kannonik Klasik

Kita akan berangkat dari asumsi bahwa energi yang dimiliki sistem-sistem dalam assembli dianggap terdiri atas tingkat-tingkat energi. Tingkat-tingkat energi tersebut berada dalam rentangan dari nol sampai tak berhingga. **Gambar 2.4** adalah ilustrasi tingkat-tingkat energi yang dimiliki assembli. Untuk sistem klasik, seperti

atom gas, perbedaan energi dua tingkat berdekatan mendekati nol, atau $\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \rightarrow 0$. Perbedaan energi yang mendekati nol memiliki makna bahwa tingkat energi sistem klasik bersifat kontinu. Sistem menempati salah satu dari tingkat energi di atas. Dalam sistem klasik tidak ada batasan jumlah sistem yang dapat menempati satu keadaan energi. Satu keadaan energi dapat saja kosong, atau ditempati oleh satu sistem, oleh dua sistem, dan seterusnya. Bahkan semua sistem berada pada satu keadaan energi pun tidak dilarang.



Gambar 2.4. Tingkat-tingkat energi yang dimiliki assembly. Sistem-sistem dalam assembly dapat memiliki energi dalam rentang dari nol hingga tak berhingga. Untuk memudahkan pembahasan, rentang energi tersebut dibagi atas tingkat-tingkat energi diskrit dengan jarak yang sangat kecil (mendekati nol). Satu nilai energi boleh dimiliki oleh sejumlah sistem. Ini berarti satu tingkat energi atau satu keadaan dapat ditempati oleh berapa sistem pun.

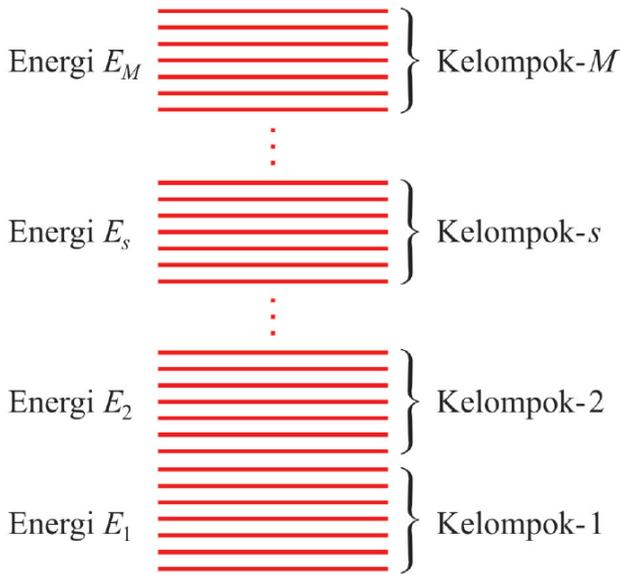
Agar sifat fisis dari assembli dapat ditentukan maka kita harus mengetahui bagaimana penyusunan sistem pada tingkat-tingkat energi yang ada serta probabilitas kemunculan masing-masing cara penyusunan tersebut. Pemahaman ini sangat diperlukan karena nilai terukur dari besaran yang dimiliki assembli sama dengan perata-rataan besaran tersebut terhadap semua kemungkinan penyusunan sistem pada tingkat-tingkat energi yang ada.

Cara menghitung berbagai kemungkinan penyusunan sistem serta probabilitas kemunculannya menjadi mudah bila tingkat-tingkat energi yang dimiliki assembli dibagi atas beberapa kelompok, seperti diilustrasikan pada **Gambar 2.5**. Di sini kita membagi tingkat energi tersebut atas M kelompok. Tiap kelompok memiliki jangkauan energi yang cukup kecil sebagai berikut.

- kelompok pertama memiliki jangkauan energi : ε sampai $d\varepsilon$;
- kelompok kedua memiliki jangkauan energi : $d\varepsilon$ sampai $2d\varepsilon$;
- kelompok ketiga memiliki jangkauan energi : $2d\varepsilon$ sampai $3d\varepsilon$;
- ...
- kelompok ke- s memiliki jangkauan energi : $(s-1)d\varepsilon$ sampai $sd\varepsilon$;
- ...
- kelompok ke- M memiliki jangkauan energi : $(M-1)d\varepsilon$ sampai $Md\varepsilon$.

Satu kelompok energi mengandung sejumlah keadaan energi. Jumlah keadaan energi pada kelompok yang berbeda bisa sama dan bisa berbeda. Misalkan jumlah keadaan energi pada tiap-tiap kelompok tersebut sebagai berikut:

- jumlah keadaan pada kelompok pertama : g_1 ;
- jumlah keadaan pada kelompok kedua : g_2 ;
- jumlah keadaan pada kelompok ketiga : g_3 ;
- ...
- jumlah keadaan pada kelompok ke- s : g_s ;
- ...
- jumlah keadaan pada kelompok ke- M : g_M .



Gambar 2.5. Kelompok-kelompok energi dalam assembli. Satu garis mewakili satu tingkat energi dalam assembli. Tingkat-tingkat energi (garis-garis) dikelompokkan lagi. Satu kelompok mengandung sejumlah tingkat energi di mana jumlahnya bisa berbeda antara satu kelompok dengan kelompok lainnya. Namun, nilai-nilai energi dalam satu kelompok diwakili oleh satu nilai energi saja (energi rata-rata). Mewakili pada satu nilai energi ini dapat dilakukan karena selisih nilai tingkat-tingkat energi dalam satu kelompok sangat kecil (mendekati nol).

Energi keadaan yang berbeda dalam satu kelompok umumnya berbeda. Tetapi karena perbedaan energi keadaan yang berbeda dalam satu kelompok sangat kecil (mendekati nol) maka kita dapat mengasumsi bahwa energi dalam satu kelompok diwakili oleh satu nilai energi saja. Energi tersebut dianggap sebagai energi rata-rata keadaan dalam kelompok yang bersangkutan. Dengan demikian kita dapat menulis,

- energi rata-rata kelompok pertama : E_1 ;

- energi rata-rata kelompok kedua : E_2 ;
- energi rata-rata kelompok ketiga : E_3 ;
- ...
- energi rata-rata kelompok ke- s : E_s ;
- ...
- energi rata-rata kelompok ke- M : E_M .

Misalkan pada konfigurasi tertentu tiap-tiap kelompok energi telah ditempati oleh sistem-sistem dengan distribusi jumlah sebagai berikut:

- jumlah sistem pada kelompok energi pertama : n_1 ;
- jumlah sistem pada kelompok energi kedua : n_2 ;
- Jumlah sistem pada kelompok energi ketiga : n_3 ;
- ...
- jumlah sistem pada kelompok energi ke- s : n_s ;
- ...
- jumlah sistem pada kelompok energi ke- M : n_M .

Sekarang kita menghitung fungsi partisi assembli tersebut. Untuk maksud tersebut kita tinjau sebuah assembli, sebut saja assembli ke- i , yang merupakan komponen dari ensembel kanonik. Sistem-sistem penyusun assembli bersifat terbedakan (partikel klasik). Jumlah sistem dan energi yang dimiliki assembli tersebut memenuhi

$$N = \sum_s n_{is} \tag{2.21}$$

$$E_i = \sum_s n_{is} \mathcal{E}_{is} \tag{2.22}$$

Untuk ensembel kanonik, N sama untuk semua assembli tetapi E_i dapat berbeda untuk assembli yang berbeda. Jumlah cara penyusunan sistem-sistem dalam assembli yang memiliki energi total E_i adalah

$$W_i = N! \prod_s \frac{g_{is}^{n_{is}}}{n_{is}!} \quad (2.23)$$

Setelah mengetahui W_i dan E_i maka kita mendapatkan ungkapan untuk fungsi partisi kanonik sebagai

$$Z_C = \sum_i W_i e^{-E_i / kT} \quad (2.24)$$

di mana indeks i adalah indeks untuk assembli (bergerak pada semua assembli dalam ensemble). Satu assembli dalam ensemble mewakili satu konfigurasi yang mungkin terjadi. Jadi jumlah assembli dalam ensemble sama dengan jumlah konfigurasi yang dapat terjadi.

Perlu diingat kembali bahwa ensemble itu tidak ada secara fisik. Yang ada hanyalah satu assembli. Tetapi satu assembli tersebut dapat memiliki sejumlah konfigurasi yang berbeda-benda dan memiliki energi yang berbeda-beda. Nah, semua kemungkinan konfigurasi dan energi yang dimiliki assembli dikumpulkan, dan kumpulan itulah yang disebut ensemble. Jadi, ensemble adalah kumpulan virtual dari assembli. Satu assembli dalam ensemble mewakili konfigurasi yang mungkin dimiliki oleh sebuah assembli.

Penjumlahan terhadap semua konfigurasi yang mungkin ekuivalen dengan penjumlahan pada semua kombinasi n_{is} yang mungkin yang kita nyatakan dengan symbol $\{n_{is}\}$. Jadi kita dapat menulis ulang persamaan (2.24) menjadi

$$\begin{aligned} Z_C &= \sum_{\{n_{is}\}} W_{\{n_{is}\}} e^{-E_{\{n_{is}\}} / kT} \\ &= \sum_{\{n_{is}\}} \left\{ N! \prod_s \frac{g_{is}^{n_{is}}}{n_{is}!} \right\} \left\{ \exp \left[- \frac{\sum_r n_{ir} \epsilon_{ir}}{kT} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Sebelum meneruskan penurunan fungsi partisi mari kita lakukan penyederhanaan berikut ini

$$\begin{aligned}
 \exp\left[-\frac{\sum_r n_{ir} \varepsilon_{ir}}{kT}\right] &= \exp\left[-\frac{n_{i1} \varepsilon_{i1} + n_{i2} \varepsilon_{i2} + n_{i3} \varepsilon_{i3} + \dots}{kT}\right] \\
 &= \exp\left[-\frac{n_{i1} \varepsilon_{i1}}{kT}\right] \exp\left[-\frac{n_{i2} \varepsilon_{i2}}{kT}\right] \exp\left[-\frac{n_{i3} \varepsilon_{i3}}{kT}\right] \dots \\
 &= [\exp(-\varepsilon_{i1} / kT)]^{n_{i1}} [\exp(-\varepsilon_{i2} / kT)]^{n_{i2}} \dots \\
 &= \prod_r \left[\exp\left(-\frac{\varepsilon_{ir}}{kT}\right) \right]^{n_{ir}} \tag{2.26}
 \end{aligned}$$

Substitusi persamaan (2.26) ke dalam persamaan (2.25) maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 Z_C &= \sum_{\{n_{is}\}} \left\{ N! \prod_s \frac{g_{is}^{n_{is}}}{n_{is}!} \right\} \left\{ \prod_r [e^{-\varepsilon_{ir} / kT}]^{n_{ir}} \right\} \\
 &= N! \sum_{\{n_{is}\}} \left\{ \prod_s \frac{(g_{is} e^{-\varepsilon_{is} / kT})^{n_{is}}}{n_{is}!} \right\} \tag{2.27}
 \end{aligned}$$

Pada penurunan persamaan di atas kita sudah menggunakan kesamaan $\prod_s x_s \prod_s y_s = \prod_s x_s y_s$.

Untuk menyelesaikan persamaan (2.27), mari kita tinjau perhitungan berikut ini.

$$(x_1 + x_2)^N = \frac{N!}{N!0!} x_1^N x_2^0 + \frac{N!}{(N-1)!1!} x_1^{N-1} x_2^1 + \dots$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{N!}{(N-n)!n!} x_1^{3-n} x_2^n + \dots \\
& = \sum_n \frac{N!}{(N-n)!n!} x_1^{3-n} x_2^n \quad (2.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x_1 + x_2 + x_3)^N & = \sum_{n_1+n_2+n_3=N} \frac{N!}{n_1!n_2!n_3!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \\
& = N! \sum_{\{n_s\}} \frac{x_1^{n_1}}{n_1!} \frac{x_2^{n_2}}{n_2!} \frac{x_3^{n_3}}{n_3!} \quad (2.29)
\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (2.28) dan (2.29) maka kita dapat menuliskan bentuk yang lebih umum untuk sembarang jumlah suku, yaitu

$$\begin{aligned}
\left(\sum_s x_s \right)^N & = N! \sum_{\{n_s\}} \frac{x_1^{n_1}}{n_1!} \frac{x_2^{n_2}}{n_2!} \frac{x_3^{n_3}}{n_3!} \dots \frac{x_s^{n_s}}{n_s!} \dots \\
& = N! \sum_{\{n_s\}} \prod_s \left(\frac{x_s^{n_s}}{n_s!} \right) \quad (2.30)
\end{aligned}$$

Apabila dalam persamaan (2.30) kita ganti x_s dengan $g_{is} e^{-\epsilon_{is}/kT}$ maka diperoleh

$$\left(\sum_s g_{is} e^{-\epsilon_{is}/kT} \right)^N = N! \sum_{\{n_{is}\}} \prod_s \frac{(g_{is} e^{-\epsilon_{is}/kT})^{n_{is}}}{n_{is}!} \quad (2.31)$$

Ruas kanan persamaan (2.13) persis sama dengan ruas kanan persamaan (2.27). Dengan demikian, ruas kiri juga mesti sama. Oleh karena itu kita simpulkan bahwa

$$\begin{aligned}
Z_C & = \left(\sum_s g_{is} e^{-\epsilon_{is}/kT} \right)^N \\
& = Z^N \quad (2.32)
\end{aligned}$$

Apa yang menarik dari persamaan (2.32)? Pada persamaan (2.32), Z adalah fungsi partisi satu sistem. Dari persamaan tersebut tampak bahwa fungsi partisi assembly kanonik sama dengan fungsi partisi satu sistem dipangkatkan dengan jumlah sistem dalam assembly tersebut. Jadi, walaupun pada assembly tersebut energi bisa keluar masuk, namun perhitungan fungsi partisi tidak sulit. Kita cukup menghitung tingkat-tingkat energi sistem lalu menghitung fungsi partisi satu sistem. Dari situ dapat dihitung fungsi partisi assembly secara mudah.

Contoh 2.3

Asembly osilator harmonik dengan N buah sistem memiliki dinding yang dapat dilewati energi. Contoh assembly ini adalah kristal yang disimpan di udara terbuka. Atom-atom tidak dapat meninggalkan kristal, sedangkan energi (kalor) dapat keluar masuk dari/ke dalam kristal. Jadi assembly yang kita miliki bersifat kanonik. Kita akan menentukan fungsi partisi assembly.

Langkah pertama adalah mencari fungsi partisi satu sistem. Untuk maksud tersebut kita perlu mengetahui tingkat-tingkat energi sistem di dalam assembly. Energi osilator harmonik terkuantisasi menurut persamaan $\varepsilon_s = (s + 1/2)\hbar\omega$. Dengan demikian, fungsi partisi satu sistem adalah

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\varepsilon_s / kT} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(s+1/2)\hbar\omega / kT} \\ &= e^{-\hbar\omega / 2kT} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-s\hbar\omega / kT} = e^{-\hbar\omega / 2kT} \times \frac{1}{1 - e^{-\hbar\omega / kT}} = \frac{e^{-\hbar\omega / 2kT}}{1 - e^{-\hbar\omega / kT}} \end{aligned}$$

Fungsi partisi kanonik menjadi

$$Z_C = Z^N = \left(\frac{e^{-\hbar\omega / 2kT}}{1 - e^{-\hbar\omega / kT}} \right)^N$$

Contoh 2.4

Selesaikan kembali Contoh 2.1 dengan menggunakan fungsi partisi

kanonik pada persamaan (2.32)

Jawab

Untuk momen magnetik dengan dua arah orientasi, energi yang mungkin dimiliki momen adalah $-\mu B$ dan μB . Dengan demikian, fungsi partisi satu sistem adalah

$$Z = e^{\mu B / kT} + e^{-\mu B / kT} = e^{-\beta \mu B} + e^{\beta \mu B}$$

Fungsi partikel kanonik menjadi

$$Z_C = Z^N = (e^{-\beta \mu B} + e^{\beta \mu B})^N$$

Energi rata-rata assembli

$$\begin{aligned} E &= \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_C = N \frac{\partial}{\partial \beta} \ln(e^{-\beta \mu B} + e^{\beta \mu B}) = N \left(\frac{-\mu B e^{-\beta \mu B} + \mu B e^{\beta \mu B}}{e^{-\beta \mu B} + e^{\beta \mu B}} \right) \\ &= N \mu B \left(\frac{e^{\beta \mu B} - e^{-\beta \mu B}}{e^{-\beta \mu B} + e^{\beta \mu B}} \right) = N \mu B \tanh(\beta \mu B) \end{aligned}$$

Hasil ini persis sama dengan yang diperoleh di Contoh 2.1.

2.6 Fungsi Partisi Kanonik Assembli Semiklasik

Yang sudah kita bahas pada bagian sebelumnya adalah fungsi partisi sistem klasik. Assembli ini memiliki ciri utama bahwa sistem-sistem penyusunnya dapat dibedakan. Pertukaran sistem dari dua keadaan yang berbeda menghasilkan konfigurasi baru. Tetapi menjadi pertanyaan jika sistem adalah atom-atom yang ukurannya sangat kecil. Apakah mungkin pertukaran dua atom hidrogen dari dua tempat berbeda dapat dibedakan? Seberapa sanggupkah kita membedakan dua atom hidrogen? Oleh karena itu, para ahli memperbaiki sifat yang dimiliki sistem dalam

assembli tersebut dengan mengenalkan konsep assembli semiklasik. Sistem-sistem tetap memenuhi sifat klasik, namun pertukaran sistem dari dua keadaan berbeda tidak menghasilkan konfigurasi baru. Jumlah pertukaran total N buah sistem adalah $N!$. Dengan demikian, jumlah konfigurasi pada assembli klasik dapat diperoleh dari jumlah konfigurasi pada assembli klasik dibagi dengan $N!$. Jadi untuk assembli semiklasik jumlah cara penyusunan sistem-sistem adalah

$$W_i = \prod_s \frac{g_{is}^{n_{is}}}{n_{is}!}$$

Dengan melakukan langkah yang sama maka kita sampai pada kesimpulan bentuk fungsi partisi kanonik assembli semiklasik adalah

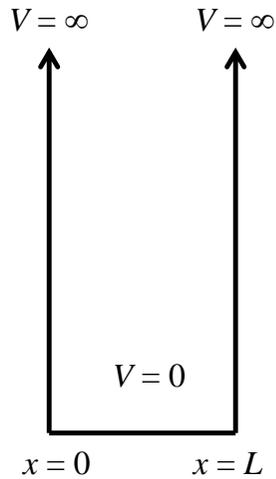
$$Z'_c = \frac{Z^N}{N!} \tag{2.33}$$

Contoh 2.5

Sebuah sumur potensial persegi memiliki lebar L . Dasar sumur memiliki energi potensial nol dan dua dinding sumur memiliki energi potensial tak berhingga (**Gambar 2.6**). N buah sistem berada dalam sumur. Tentukan fungsi partisi kanonik assembli partikel tersebut.

Jawab

Gambar sumur potensial sebagai berikut



Gambar 2.6 Sketsa sumur potensial pada Contoh 2.5.

Kita mulai dengan menghitung tingkat-tingkat energi sistem dalam sumur. Kita berangkat dari persamaan Schrodinger. Untuk lokasi di dalam sumur, persamaan Schrodinger adalah

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = \varepsilon\psi$$

Persamaan di atas dapat ditulis ulang dalam bentuk

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \omega^2\psi = 0$$

dengan $\omega^2 = 2m\varepsilon/\hbar^2$. Solusi umum fungsi gelombang adalah $\psi(x) = A\cos \omega x + B\sin \omega x$. Selanjutnya kita masukkan syarat batas bahwa pada $x = 0$ nilai fungsi gelombang nol, atau $0 = A\cos 0 + B\sin 0$. Kesamaan ini mengharuskan $A = 0$. Dengan demikian, fungsi yang dipenuhi menjadi $\psi(x) = B\sin \omega x$. Kemudian kita masukkan syarat batas kedua bahwa pada $x = L$ fungsi gelombang juga nol, atau $0 = B\sin \omega L$. Kesamaan ini dipenuhi oleh $\omega L = n\pi$. Dengan menggunakan definisi

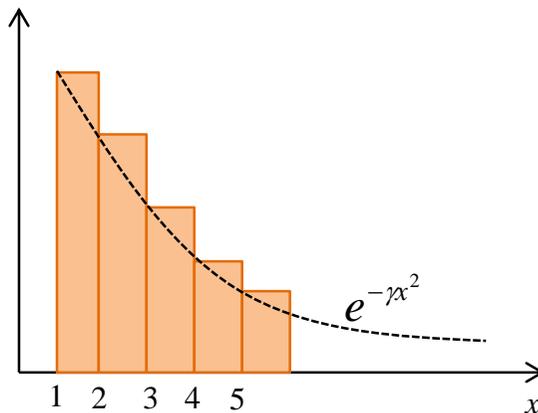
sebelumnya maka kita dapatkan $L\sqrt{2m\varepsilon/\hbar^2} = n\pi$ atau

$\varepsilon_n = n^2\pi^2\hbar^2/2mL^2$. Fungsi partisi satu partikel adalah

$$Z = \sum_n e^{-\varepsilon_n/kT} = \sum_n e^{-\gamma n^2}$$

dengan $\gamma = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2kT}$.

Penjumlahan pada fungsi partisi di atas sama dengan luas semua persegi panjang pada **Gambar 2.7**. Penjumlahan luas tersebut sulit dihitung langsung. Namun kita aproksimasi luas tersebut dengan luas daerah di bawah kurva $e^{-\gamma x^2}$.



Gambar 2.7 Fungsi partisi sama dengan luas semua persegi panjang. Karena perhitungan luas semua persegi panjang tersebut sulit dilakukan maka luas tersebut dapat didekati dengan luas daerah di bawah kurva yang dapat dicari dengan proses integral sederhana.

Jadi pendekatan untuk fungsi partisi satu sistem adalah,

$$Z \approx \int_1^{\infty} e^{-\gamma x^2} dx \approx \int_0^{\infty} e^{-\gamma x^2} dx - e^{-\gamma} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma x^2} dx - e^{-\gamma} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} - e^{-\gamma}$$

Karena sistem ini jelas tidak dapat dibedakan maka kita dapatkan fungsi partisi kanonik menjadi

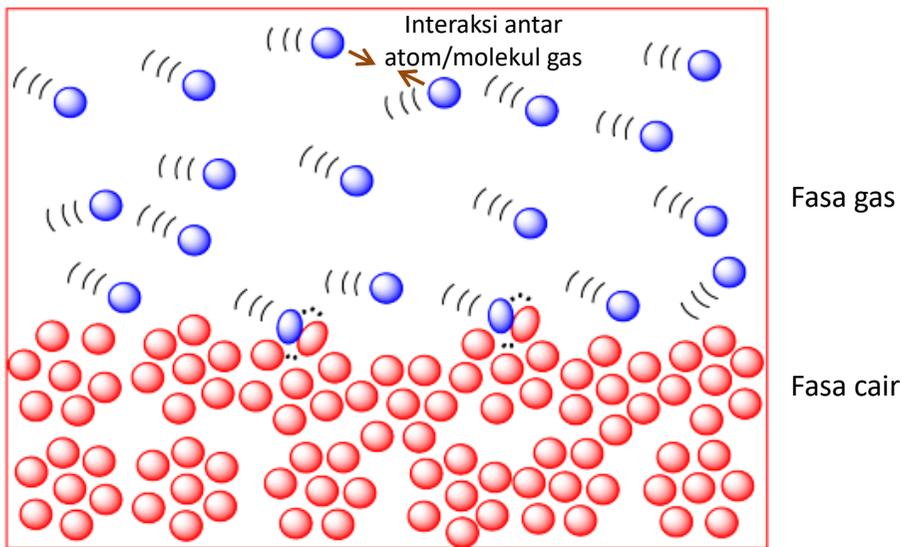
$$Z_c = \frac{Z^N}{N!} \approx \frac{1}{N!} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} - e^{-\gamma} \right)^N$$

2.6 Formulasi Kanonik Gas Tidak Ideal

Hingga saat ini gas yang kita bahas adalah gas ideal. Kita tidak pernah memasukkan interaksi antar partikel gas. Memang persamaan yang dihasilkan dapat menjelaskan banyak pengamatan tentang sifat-sifat gas seperti hukum Boyle, Gay-Lussac dan persamaan gas ideal secara umum. Namun, karena tidak adanya interaksi antar molekul/atom gas maka gas ideal tidak pernah bisa berubah wujud menjadi cair. Pencairan gas hanya bisa terjadi kalau ada gaya tarik antar molekul gas. Saat mendekati suhu pencairan, energi yang dihasilkan oleh gaya interaksi tersebut lebih besar daripada energi termal (**Gambar 2.8**). Jika kita ingin membahas fenomena pencairan gas maka kita harus keluar dari batasan gas ideal dan mulai memperkenalkan konsep interaksi antar molekul/atom gas.

Dengan menggunakan konsep ensemble kanonik, kita diperbolehkan untuk memperkenalkan interaksi antar partikel gas dalam assembly. Misalkan energi yang dimiliki partikel gas hanya energi kinetik maka fungsi partisi hanya mengandung energi tersebut. Namun jika ada interaksi antar partikel gas maka fungsi partisi dibangun dari energi total assembly berikut ini

$$E = \frac{1}{2m} \sum_j (p_{xj}^2 + p_{yj}^2 + p_{zj}^2) + \sum_j \sum_{\lambda > j} U_{j\lambda} \quad (2.34)$$



Gambar 2.8. Antar atom/molekul gas selalu terdapat gaya tarik menarik meskipun sangat kecil. Gaya tarik tersebut menjadi dominan ketika suhu cukup rendah. Gaya tersebut dapat menyatukan atom/molekul gas dalam fase baru, yaitu fase cair. Tanpa adanya interaksi antara atom/molekul gas maka tidak akan terjadi proses pencairan gas. Untuk membahas mekanisme ini maka kita tidak dapat menggunakan teori gas ideal (gambar adalah hasil modifikasi dari: *employees.csbsju.edu*).

Suku pertama pada persamaan (2.34) adalah jumlah energi kinetik semua partikel gas dan suku kedua adalah jumlah interaksi total partikel-partikel gas. Penjumlahan suku kedua dilakukan pada semua pasangan molekul gas. Pada penjumlahan U_{jk} kita mensyaratkan $\lambda > j$ untuk menghindari perhitungan ganda. Contohnya adalah $U_{19} = U_{91}$. Suku tersebut hanya boleh dihitung satu kali dan diwakilkan kepada U_{19} saja ($j = 1$ dan $\lambda = 9$). Suku dengan $\lambda = j$ juga tidak disertakan karena tidak ada interaksi antara sistem dengan dirinya sendiri.

Kita akan menghitung fungsi partisi dengan metode integral. Untuk maksud tersebut kita harus menggunakan karapatan keadaan untuk mengganti tanda

penjumlahan menjadi tanda integral. Untuk sistem semiklasik, kerapatan keadaan adalah $d\Gamma_{6N}/h^{3N}$ dengan $d\Gamma_{6N} = \prod_i dx_i dy_i dz_i dp_{xi} dp_{yi} dp_{zi}$. Dengan demikian fungsi partisi dapat ditulis menjadi

$$Z_c = \frac{1}{N!h^{3N}} \int \exp \left[- \frac{\sum_j \frac{p_{xj}^2 + p_{yj}^2 + p_{zj}^2}{2m} + \sum_j \sum_{\lambda > j} U_{j\lambda}}{kT} \right] \prod_i dx_i dy_i dz_i dp_{xi} dp_{yi} dp_{zi} \quad (2.35)$$

Mari kita fokuskan pada bagian integral persamaan (2.35) yaitu

$$\int \exp \left[- \frac{\sum_j \frac{p_{xj}^2 + p_{yj}^2 + p_{zj}^2}{2m} + \sum_j \sum_{\lambda > j} U_{j\lambda}}{kT} \right] \prod_i dx_i dy_i dz_i dp_{xi} dp_{yi} dp_{zi}$$

Integral terhadap momentum dan terhadap posisi dapat dipisahkan karena masing-masing merupakan variabel bebas. Momentum tidak bergantung pada posisi, dan sebaliknya. Dengan pemisahan tersebut kita dapatkan bentuk berikut ini

$$\begin{aligned} & \int \exp \left[- \frac{\sum_j \frac{p_{xj}^2 + p_{yj}^2 + p_{zj}^2}{2m}}{kT} \right] \prod_i dp_{xi} dp_{yi} dp_{zi} \int \exp \left[- \frac{\sum_j \sum_{\lambda > j} U_{j\lambda}}{kT} \right] \prod_i dx_i dy_i dz_i \\ &= I_N \int \exp \left[- \frac{\sum_j \frac{p_{xj}^2}{2m}}{kT} \right] \exp \left[- \frac{\sum_j \frac{p_{yj}^2}{2m}}{kT} \right] \exp \left[- \frac{\sum_j \frac{p_{zj}^2}{2m}}{kT} \right] \prod_i dp_{xi} dp_{yi} dp_{zi} \quad (2.36) \end{aligned}$$

di mana kita telah mendefinisikan

$$I_N = \int \exp \left[- \frac{\sum_j \sum_{\lambda > j} U_{j\lambda}}{kT} \right] \prod_i dx_i dy_i dz_i \quad (2.37)$$

Persamaan (2.36) dapat ditulis secara lebih sederhana dalam bentuk perkalian berikut ini

$$I_N \int \prod_j \exp \left[- \frac{p_{xj}^2}{2mkT} \right] \prod_j \exp \left[- \frac{p_{yj}^2}{2mkT} \right] \prod_j \exp \left[- \frac{p_{zj}^2}{2mkT} \right] \prod_i dp_{xi} dp_{yi} dp_{zi} \quad (2.38)$$

Dengan menggunakan kesamaan berikut ini $\prod_s x_s \prod_s y_s = \prod_s x_s y_s$ maka kita dapat menulis persamaan (2.38) menjadi

$$\begin{aligned} I_N \int \prod_j \exp \left[- \frac{p_{xj}^2}{2mkT} \right] dp_{xj} \int \prod_j \exp \left[- \frac{p_{yj}^2}{2mkT} \right] dp_{yj} \int \prod_j \exp \left[- \frac{p_{zj}^2}{2mkT} \right] dp_{zj} \\ = I_N \prod_j \left(\int e^{-p_{xj}^2/2mkT} dp_{xj} \right) \prod_j \left(\int e^{-p_{yj}^2/2mkT} dp_{yj} \right) \prod_j \left(\int e^{-p_{zj}^2/2mkT} dp_{zj} \right) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Selanjutnya kita menggunakan integral yang sudah umum (sering juga kita gunakan) yaitu $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\lambda x^2) dx = \sqrt{\pi/\lambda}$. Dengan sifat ini maka kita dapatkan

$$e^{-p_{xj}^2/2mkT} dp_{xj} = \int e^{-p_{yj}^2/2mkT} dp_{yj} = \int e^{-p_{zj}^2/2mkT} dp_{zj} = \sqrt{2\pi mkT} \quad (2.40)$$

Tampak bahwa hasil integral pada persamaan (2.40) tidak bergantung pada indeks. Indeks berapa pun akan menghasilkan nilai integral yang sama. Karena ada N buah perkalian dalam tanda \prod_j maka persamaan (2.39) memberikan hasil sebagai berikut

$$\begin{aligned}
& I_N \prod_j (\sqrt{2\pi mkT}) \prod_j (\sqrt{2\pi mkT}) \prod_j (\sqrt{2\pi mkT}) \\
&= I_N (\sqrt{2\pi mkT})^N (\sqrt{2\pi mkT})^N (\sqrt{2\pi mkT})^N \\
&= (2\pi mkT)^{3N/2} I_N
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Substitusi persamaan (2.41) ke dalam persamaan (2.35) didapatkan ungkapan untuk fungsi partisi kanonik menjadi

$$Z_C = \frac{1}{N! h^{3N}} (2\pi mkT)^{3N/2} I_N \tag{2.42}$$

Selanjutnya kita mencari I_N yang didefinisikan pada persamaan (2.37). Mari kita lakukan prosedur berikut ini. Karena $e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \dots$ maka kita dapat menulis $e^x = 1 + g(x)$ dengan $g(x) = x + x^2/2! + x^3/3! + \dots$. Dengan cara yang sama kita dapat menulis

$$e^{-U_{j\lambda}/kT} = 1 + f(r_{j\lambda}) \tag{2.43}$$

di mana

$$f(r_{j\lambda}) = -\frac{U_{j\lambda}}{kT} + \frac{1}{2} \left(\frac{U_{j\lambda}}{kT} \right)^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{U_{j\lambda}}{kT} \right)^3 + \dots \tag{2.44}$$

Dengan penulisan tersebut maka kita memperoleh hubungan berikut ini

$$\begin{aligned}
e^{-\sum_j \sum_{\lambda>j} U_{j\lambda}/kT} &= \prod_j \prod_{\lambda>j} e^{-U_{j\lambda}/kT} \\
&= \prod_j \prod_{\lambda>j} [1 + f(r_{j\lambda})]
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Jika terpenuhi kondisi $|f(r_{j\lambda})| \ll 1$ maka kita dapat melakukan

aproksimasi

$$\prod_j \prod_{\lambda > j} [1 + f(r_{j\lambda})] \approx 1 + \sum_j \sum_{\lambda > j} f(r_{j\lambda}) \quad (2.46)$$

Aproksimasi tersebut memiliki makna bahwa besar energi interaksi antar molekul, $U_{j\lambda}$, jauh lebih kecil daripada energi termal molekul, kT . Kondisi ini umumnya dipenuhi oleh gas pada suhu yang tidak terlalu rendah atau gas pada kerapatan rendah. Dengan melakukan substitusi persamaan (2.45) dan (2.46) ke dalam persamaan (2.37) kita dapatkan bentuk aproksimasi untuk I_N sebagai berikut

$$\begin{aligned} I_N &\approx \int \left\{ 1 + \sum_j \sum_{\lambda > j} f(r_{j\lambda}) \right\} \prod_i dx_i dy_i dz_i \\ &= \int \prod_i dx_i dy_i dz_i + \int \sum_j \sum_{\lambda > j} f(r_{j\lambda}) \prod_i dx_i dy_i dz_i \\ &= \prod_i \int dx_i dy_i dz_i + \sum_j \sum_{\lambda > j} \int f(r_{j\lambda}) \prod_i dx_i dy_i dz_i \end{aligned} \quad (2.47)$$

Integral $\int dx_i dy_i dz_i$ adalah volum. Namun, karena di sini kita sudah memperhatikan gaya tarik antar partikel gas maka secara implisit jarak antar partikel gas dianggap cukup dekat. Dengan jarak yang cukup dekat maka volum total partikel gas tidak dapat diabaikan terhadap volum assembli. Volum ruang kosong pada assembli tidak lagi V tetapi $V' = V - Nv_0$ dengan v_0 adalah volum satu partikel gas. Integral volum yang dilakukan pada pembahasan terdahulu telah dilakukan pada ruang kosong (karena menganggap volume total partikel gas nol). Jika langkah integral yang sama diterapkan di sini mana nilai $\int dx_i dy_i dz_i$ bukan lagi V tetapi $V' = V - Nv_0$. Kemudian, mengingat Π_i mengandung N buah suku perkalian maka persamaan (2.47) memberikan hasil

$$I_N = V^{1N} + \sum_j \sum_{\lambda > j} \int f(r_{j\lambda}) \prod_i dx_i dy_i dz_i \quad (2.48)$$

Langkah selanjutnya adalah menyelesaikan sisa integral pada persamaan (2.49). Jarak antar partikel j dan λ memenuhi

$$r_{j\lambda} = \sqrt{(x_\lambda - x_j)^2 + (y_\lambda - y_j)^2 + (z_\lambda - z_j)^2}. \text{ Dengan demikian, } f(r_{j\lambda}) \text{ hanya}$$

mengandung enam variable, yaitu $x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda, x_j, y_j,$ dan z_j . Oleh karena itu, dalam perkalian elemen diferensial $\prod_i dx_i dy_i dz_i$ (memuat $3N$ elemen diferensial), hanya enam elemen diferensial saja yang bekerja pada $f(r_{j\lambda})$ sedangkan sebanyak $3N-6$ buah elemen lainnya tidak bekerja pada $f(r_{j\lambda})$. Dengan sifat demikian kita dapat menulis

$$I_N = V^{1N} + \sum_j \sum_{\lambda > j} \int \prod_{\substack{i \neq j \\ i \neq \lambda}} dx_i dy_i dz_i \int f(r_{j\lambda}) dx_j dy_j dz_j dx_\lambda dy_\lambda dz_\lambda$$

Perhatikan bagian integral $\int \prod_{\substack{i \neq j \\ i \neq \lambda}} dx_i dy_i dz_i$ yang menghasilkan volume

pangkat sekian. Tetapi hasil yang diperoleh bukan V^{N-2} karena $dx_j dy_j dz_j dx_\lambda dy_\lambda dz_\lambda$ tidak termasuk dalam integral tersebut. Kalau $dx_j dy_j dz_j dx_\lambda dy_\lambda dz_\lambda$ diintegral maka hasilnya V^2 . Dengan demikian, integral $\int \prod_{\substack{i \neq j \\ i \neq \lambda}} dx_i dy_i dz_i$ saja menghasilkan V^{N-2} .

Akhirnya kita dapat menulis I_N sebagai

$$\begin{aligned} I_N &= V^{1N} + \sum_j \sum_{\lambda > j} V^{N-2} \int f(r_{j\lambda}) dx_j dy_j dz_j dx_\lambda dy_\lambda dz_\lambda \\ &= V^{1N} + V^{N-2} \sum_j \sum_{\lambda > j} \int f(r_{j\lambda}) dx_j dy_j dz_j dx_\lambda dy_\lambda dz_\lambda \end{aligned} \quad (2.49)$$

Perlu diingat bahwa setelah kita melakukan integral maka $\int f(r_{j\lambda}) dx_j dy_j dz_j dx_\lambda dy_\lambda dz_\lambda$ tidak lagi mengandung indeks j maupun λ karena variabel

tersebut habis diintegral. Integral tersebut menghasilkan angka yang tidak lagi bergantung pada variabel maupun indeks. Akibatnya, penjumlahan pada ruas kanan menjadi penjumlahan dari angka-angka yang nilainya sama, di mana nilai masing-masing suku tersebut adalah $\int f(r_{j\lambda}) dx_j dy_j dz_j dx_\lambda dy_\lambda dz_\lambda$. Hasil dari penjumlahan tersebut sama dengan nilai suku dikali dengan banyaknya suku penjumlahan. Banyaknya suku pada dobel penjumlahan adalah $N(N-1)/2$. Dengan demikian kita dapat menulis

$$I_N = V^{iN} + V^{iN-2} \frac{N(N-1)}{2} \int f(r_{j\lambda}) dx_j dy_j dz_j dx_\lambda dy_\lambda dz_\lambda \quad (2.50)$$

Untuk menyelesaikan integral dalam persamaan (2.50), kita perkenalkan variabel relatif $r = r_{j\lambda}$. Dengan memperkenalkan variabel relatif ini maka kita dapat melakukan transformasi berikut ini

$$\begin{aligned} \int f(r_{j\lambda}) dx_j dy_j dz_j dx_\lambda dy_\lambda dz_\lambda &= \int f(r) d^3 \vec{r} dx_\lambda dy_\lambda dz_\lambda \\ &= \int dx_\lambda dy_\lambda dz_\lambda \int f(r) d^3 \vec{r} = V' \int f(r) d^3 \vec{r} \\ &= a V' \end{aligned} \quad (2.51)$$

di mana $d^3 \vec{r}$ adalah elemen volum dalam ruang relatif dan $a = \int f(r) d^3 \vec{r}$.

Akhirnya kita dapatkan

$$\begin{aligned} I_N &= V^{iN} + V^{iN-2} \frac{N(N-1)}{2} a V' \\ &= V^{iN} + \frac{N(N-1)a}{2} V^{iN-1} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Misalkan energi interaksi antar partikel sangat kecil sehingga berlaku

$|U_{j\lambda} / kT| \ll 1$. Dengan asumsi ini maka kita dapat menulis

$$e^{-U_{j\lambda} / kT} \approx 1 - \frac{U_{j\lambda}}{kT} \quad (2.53)$$

Jika kita bandingkan persamaan (2.43) dan aproksimasi (2.53) maka kita dapat simpulkan bahwa

$$f(r_{j\lambda}) = -U_{j\lambda} / kT \quad (2.54)$$

Dengan bentuk ini maka parameter a menjadi

$$a = \int \left[-\frac{U(r)}{kT} \right] d^3\vec{r} = -\frac{\int U(r) d^3\vec{r}}{kT} = \frac{a'}{kT}. \quad (2.55)$$

Selanjutnya kita substitusi persamaan (2.55) ke dalam persamaan (2.52) dan diperoleh

$$I_N = V^{iN} + \frac{N(N-1)a'}{2kT} V^{iN-1} \quad (2.56)$$

Akhirnya fungsi partisi kanonik menjadi

$$Z_C = \frac{1}{N!h^{3N}} (2\pi mkT)^{3N/2} \left(V^{iN} + \frac{N(N-1)a'}{2kT} V^{iN-1} \right) \quad (2.57)$$

Dengan menggunakan persamaan (2.42) maka energi bebas Helmholtz dapat ditulis

$$F = -kT \ln Z_C$$

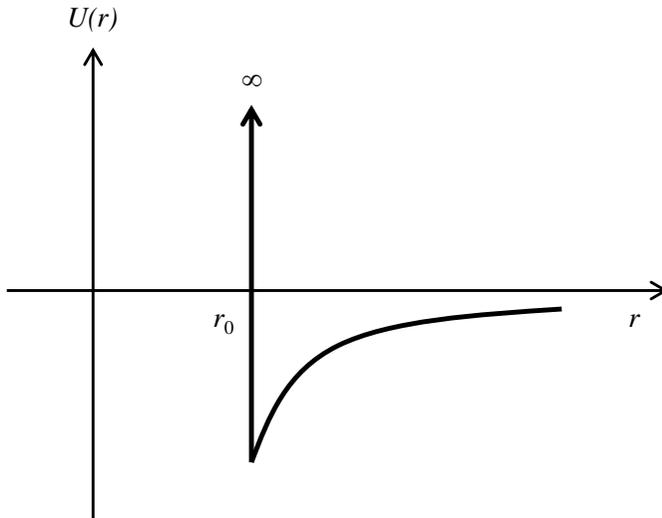
$$= -kT \left\{ \ln \frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{N!h^{3N}} + \ln I_N \right\} \quad (2.58)$$

Dari energi bebas Helmholtz ini kita akan turunkan sejumlah persamaan termodinamika untuk gas tidak ideal tersebut.

Contoh 2.6

Kita ingin menghitung parameter a untuk potensial seperti pada **Gambar 2.9**. Potensial pada gambar tersebut memenuhi persamaan berikut ini

$$U(r) = \begin{cases} \infty & 0 \leq r \leq r_0 \\ -u_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^m & r_0 < r \leq \infty \end{cases} \quad (2.59)$$



Gambar 2.9 Contoh potensial interaksi antar atom/molekul gas. Pada jarak yang jauh energi interaksi makin kecil dengan bertambahnya jarak. Pada jarak r_0 energi interaksi menjadi tak berhingga. Ini berarti partikel tidak mungkin lebih dekat lagi dari jarak r_0 . Jarak r_0 adalah jarak antara dua partikel saat bersentuhan (jika dianggap partikel berbentuk bola). Ini berarti jarak r_0 merupakan diameter partikel.

Sebelum mulai menerapkan energi potensial guna menghitung parameter a ,

mari kita balik ke persamaan (2.37)

$$I_N = \int \exp \left[- \frac{\sum_j \sum_{\lambda > j} U_{j\lambda}}{kT} \right] \prod_i dx_i dy_i dz_i$$

Karena pada daerah $0 \leq r \leq r_0$ potensial memiliki nilai tak berhingga sedangkan pada daerah lain nilai potensial berhingga maka kita dapat memisalkan integral di atas ada dua bagian sebagai berikut

$$I_N = \int_{0 \leq r \leq r_0} \int \exp \left[- \frac{\sum_j \sum_{\lambda > j} U_{j\lambda}}{kT} \right] \prod_i dx_i dy_i dz_i + \int_{r > r_0} \int \exp \left[- \frac{\sum_j \sum_{\lambda > j} U_{j\lambda}}{kT} \right] \prod_i dx_i dy_i dz_i$$

Suku pada integral pertama pertama nol sehingga hasil integralnya nol. Dengan demikian

$$I_N = \int_{r > r_0} \int \exp \left[- \frac{\sum_j \sum_{\lambda > j} U_{j\lambda}}{kT} \right] \prod_i dx_i dy_i dz_i$$

Jadi kita hanya melakukan integral pada daerah yang lebih besar dari r_0 .

Setelah menolkan integral pada daerah $r < r_0$ maka nilai parameter a menjadi

$$a = \int_{r_0}^{\infty} f(\bar{r}) d^3 \bar{r} = \int_{r_0}^{\infty} f(r) (4\pi r^2) dr = 4\pi \int_{r_0}^{\infty} (e^{-U(r)/kT} - 1) r^2 dr \quad (2.60)$$

Dengan memasukkan persamaan (2.59) ke dalam persamaan (2.60) maka

kita dapat menulis

$$a = 4\pi \int_{r_0}^{\infty} \left(e^{u_0(r_0/r)^m/kT} - 1 \right) r^2 dr$$

Selanjutnya kita misalkan $u_0(r_0/r)^m/kT \ll 1$. Dengan

aproksimasi ini maka

$$e^{u_0(r_0/r)^m/kT} - 1 \approx \frac{u_0}{kT} \left(\frac{r_0}{r} \right)^m$$

Dengan demikian, nilai aproksimasi untuk parameter a menjadi

$$\begin{aligned} a &\approx 4\pi \int_{r_0}^{\infty} \frac{u_0}{kT} \left(\frac{r_0}{r} \right)^m r^2 dr = 4\pi \frac{u_0 r_0^m}{kT} \int_{r_0}^{\infty} r^{-(m-2)} dr \\ &= 4\pi \frac{u_0 r_0^m}{kT} \left[-\frac{1}{(m-3)r^{m-3}} \right]_{r_0}^{\infty} = 4\pi \frac{u_0 r_0^m}{kT} \frac{1}{r_0^{m-3}} = \frac{4\pi r_0^3}{m-3} \frac{u_0}{kT} \end{aligned}$$

2.7 Persamaan Keadaan Gas Tidak Ideal

Untuk gas ideal kita sudah memiliki persamaan keadaan yang sederhana, yaitu $PV = NkT$. Sekarang kita ingin mencari persamaan keadaan untuk gas yang tidak ideal yang dibahas di atas. Kita mulai dengan menentukan tekanan gas dengan memasukkan F pada persamaan (2.58) ke dalam persamaan (2.12). Dari ungkapan energi bebas pada persamaan (2.58) hanya I_N yang mengandung besaran volum. Oleh karena itu kita dapat menulis

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = kT \left(\frac{\partial}{\partial V} \ln I_N \right)_T = kT \frac{1}{I_N} \left(\frac{\partial I_N}{\partial V} \right)_T$$

$$\begin{aligned}
&= kT \left(\frac{NV^{N-1} + N(N-1)^2 V^{N-2} a' / 2kT}{V^N + N(N-1)V^{N-1} a' / 2kT} \right) \\
&= \frac{NkT}{V'} \left(\frac{1 + (N-1)^2 a' / 2kTV'}{1 + N(N-1)a' / 2kTV'} \right) \\
&= \frac{NkT}{V'} \left(1 + \frac{(N-1)^2 a'}{2kTV'} \right) \left(1 + \frac{N(N-1)a'}{2kTV'} \right)^{-1} \tag{2.61}
\end{aligned}$$

Kemudian menggunakan pendekatan binomial $(1 + x)^{-n} \approx 1 - nx$, dengan asumsi $|x| \ll 1$. Kita lakukan aproksimasi binomial pada suku kurung terakhir persamaan (2.61) dan diperoleh

$$\begin{aligned}
p &\approx \frac{NkT}{V'} \left(1 + \frac{(N-1)^2 a'}{2kTV'} \right) \left(1 - \frac{N(N-1)a'}{2kTV'} \right) \\
&\approx \frac{NkT}{V'} \left(1 + \frac{(N-1)^2 a'}{2kTV'} - \frac{N(N-1)a'}{2kTV'} \right) \\
&\approx \frac{NkT}{V'} \left(1 - \frac{(N-1)a'}{2kTV'} \right) = \frac{NkT}{V'} - \frac{N(N-1)a'}{2V'^2} \tag{2.62}
\end{aligned}$$

Karena $N \gg 1$ maka $N-1 \cong N$ sehingga persamaan (2.62) dapat diaproksimasi menjadi

$$p + \frac{N^2 a'}{2V'^2} \approx \frac{NkT}{V'};$$

atau

$$\left(p + \frac{N^2 a'}{2V'^2} \right) V' \approx NkT;$$

atau

$$\left(p + \frac{N^2 a'}{2(V - Nv_0)^2} \right) (V - Nv_0) \approx NkT \tag{2.63}$$

Dengan menganggap bahwa Nv_0 masih cukup kecil dibandingkan dengan

V maka kita dapat mengabaikan Nv_0 terhadap V pada penyebut persamaan (2.63). Sedangkan pada pembilang, Nv_0 kita pertahankan karena walaupun nilainya lebih kecil dari Nv_0 tetapi tetap memberi perubahan nilai yang signifikan pada persamaan. Dengan demikian persamaan (2.63) dapat ditulis menjadi

$$\left(p + \frac{N^2 a' / 2}{V^2} \right) (V - Nv_0) = NkT \quad (2.64)$$

Jumlah partikel sebanding dengan jumlah mol gas, n , atau $N \propto n$. Dengan demikian kita dapat menulis $N^2 a' / 2 = n^2 \tilde{a}$ dan $Nv_0 = n\tilde{b}$. Akhirnya kita mendapatkan persamaan akhir sebagai berikut

$$\left(p + \frac{n^2 \tilde{a}}{V^2} \right) (V - n\tilde{b}) = nRT \quad (2.65)$$

Persamaan (2.65) tidak lain merupakan persamaan *van der Waals*. Nilai \tilde{a} dan \tilde{b} sudah ditabelkan untuk sejumlah gas. **Tabel 2.1** adalah nilai parameter van der Waals untuk sejumlah gas.

Tabel 2.1 Parameter van der Waals untuk sejumlah gas (dari berbagai sumber)

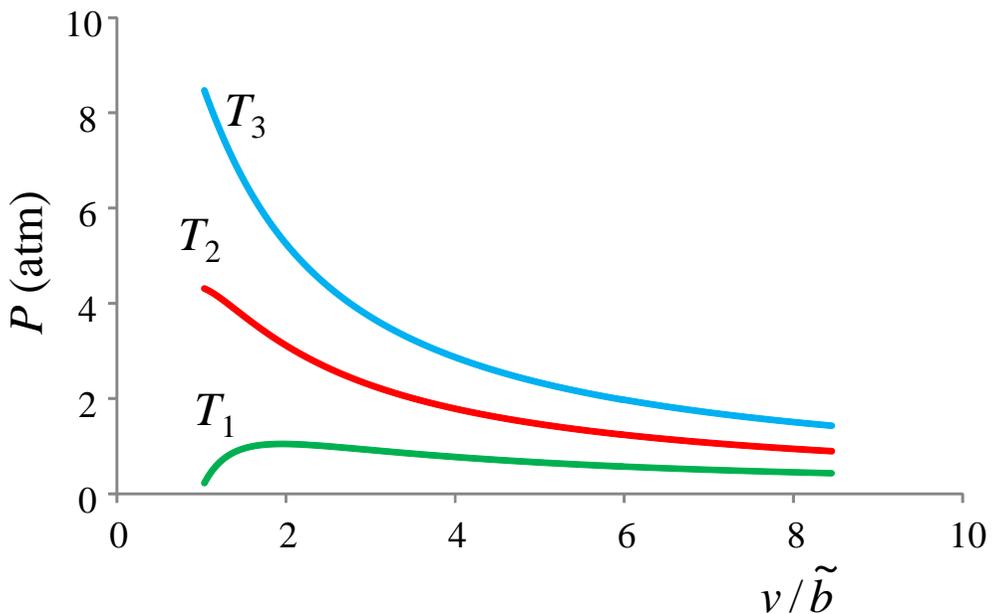
Gas	\tilde{a} (L ² atm/mol ²)	\tilde{b} (L/mol)
Air	5.536	0.03049
Asam asetat	17.71	0.1065
Aseton	16.02	0.1124
Asetonitril	17.81	0.1168
Asetilen	4.516	0.0522
Amonia	4.170	0.0371
Argon	1.355	0.03201
Benzen	18.24	0.1154

Butan	14.66	0.1226
Karbon dioksida	3.640	0.04267
Karbon monoksida	1.505	0.03985
Klor	6.579	0.05622
Klorobenzen	25.77	0.1453
Etana	5.562	0.0638
Etanol	12.18	0.08407
Freon	10.78	0,0998
Helium	0.0346	0.0238
Hexan	24.71	0.1735
Hidrogen	0.2476	0.02661
Kripton	2.349	0,03978
Metan	2.283	0.04278
Metanol	9.649	0.06702
Neon	0.2135	0.01709
Nitrogen	1.370	0.0387
Oksigen	1.382	0.03186
Propan	8.779	0.08445
Xenon	4.250	0.05105

Jika kita mendefinisikan $v = V/N$ dengan v adalah volum per mol gas maka persamaan van der Waals dapat ditulis sebagai

$$\left(p + \frac{\tilde{a}}{v^2}\right)(v - \tilde{b}) = RT \quad (2.66)$$

Gambar 2.10 adalah kurva tekanan sebagai fungsi volum pada berbagai suhu untuk gas amonia. Parameter dalam persamaan van der Waals ada di Tabel 2.1. Kita gambar tiga kurva pada suhu $T_1 = 75$ K, $T_2 = 100$ K, dan $T_3 = 150$ K. Tampak bahwa pada suhu yang tinggi kurva mendekati kurva gas ideal, yaitu $P \propto 1/V$. Penyimpangan terhadap kurva gas ideal terjadi pada suhu rendah di mana energi interaksi antar molekul tidak dapat diabaikan terhadap energi kinetik molekul gas.



Gambar 2. 10 Tekanan sebagai fungsi volum pada berbagai suhu untuk gas amonia. Parameter dalam persamaan *van der Walls* ada di Tabel 2.1. Tiga kurva memiliki suhu masing-masing $T_1 = 75$ K, $T_2 = 100$ K, dan $T_3 = 150$ K

2.8 Fluktuasi Energi Assembli

Seperti sudah kita bahas sebelumnya, karena ensemble kanonik memungkinkan aliran energi keluar atau masuk dari/ke dalam assembli, maka dapat terjadi fluktuasi energi yang dimiliki oleh assembli tersebut. Pertanyaan selanjutnya adalah berapa besar fluktuasi energi assembli tersebut? Apa yang menentukan fluktuasi energi tersebut. Mari kita coba bahas.

Misalkan E adalah energi rata-rata yang dimiliki assembli tersebut. Misalkan suatu saat assembli tersebut memiliki energi E_i . Penyimpangan energi sesaat assembli terhadap energi rata-rata adalah

$$\delta E = E_i - E \quad (2.67)$$

Kita kuadratkan dua ruas persamaan (2.67) dan diperoleh

$$\delta E^2 = (E_i - E)^2 = E_i^2 - 2E_i E + E^2 \quad (2.68)$$

Kita selanjutnya melakukan perata-rataan ke dua ruas persamaan (2.68), yaitu

$$\begin{aligned} \overline{\delta E^2} &= \overline{E_i^2 - 2E_i E + E^2} = \overline{E_i^2} - 2\overline{E_i} E + \overline{E^2} = \overline{E_i^2} - 2E E + E^2 \\ &= \overline{E_i^2} - E^2 \end{aligned} \quad (2.69)$$

Dalam mencari persamaan (2.69) kita telah menggunakan kesamaan $\overline{E_i} = E$.

Mengingat E konstan maka E^2 juga konstan sehingga perata-rataannya memberikan nilai yang sama, atau $\overline{E^2} = E^2$.

Sebelumnya kita sudah mendapatkan hubungan antara energi dan fungsi partisi sebagai berikut

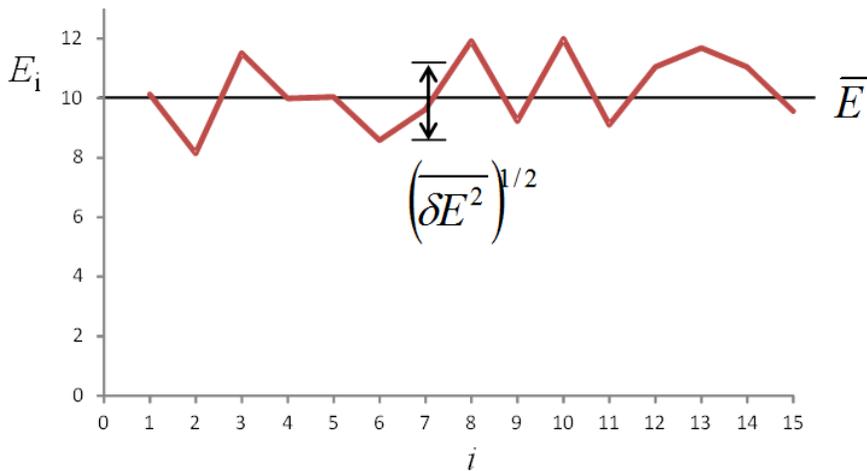
$$E = \frac{1}{Z_C} \frac{\partial Z_C}{\partial \beta} \quad (2.70)$$

Sekarang kita akan mencari ungkapan untuk $\overline{E_i^2}$.

$$\begin{aligned} \overline{E_i^2} &= \sum_i E_i^2 p_i = \sum_i E_i^2 \frac{1}{Z_C} e^{-E_i/kT} \\ &= \frac{1}{Z_C} \sum_i E_i^2 e^{-E_i/kT} = \frac{1}{Z_C} \sum_i \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} e^{-E_i/kT} \\ &= \frac{1}{Z_C} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \sum_i e^{-E_i/kT} = \frac{1}{Z_C} \frac{\partial^2 Z_C}{\partial \beta^2} \end{aligned} \quad (2.71)$$

Substitusi (2.70) dan (2.71) ke dalam persamaan (2.69) diperoleh

$$\overline{\delta E^2} = \frac{1}{Z_c} \frac{\partial^2 Z_c}{\partial \beta^2} - \left(\frac{1}{Z_c} \frac{\partial Z_c}{\partial \beta} \right)^2 = \frac{1}{Z_c} \frac{\partial^2 Z_c}{\partial \beta^2} - \frac{1}{Z_c^2} \left(\frac{\partial Z_c}{\partial \beta} \right)^2 \quad (2.72)$$



Gambar 2.11 Ilustrasi fluktuasi energi assembli. Sumbu datar menyatakan assembli ke- i sedangkan sumbu vertikal adalah energi yang dimiliki masing-masing assembli. Garis mendatar adalah energi rata-rata assembli.

Jika kita diferensialkan E pada persamaan (2.70) terhadap β kita dapatkan

$$\frac{\partial E}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{Z_c} \frac{\partial Z_c}{\partial \beta} \right) = \frac{1}{Z_c} \frac{\partial^2 Z_c}{\partial \beta^2} - \frac{1}{Z_c^2} \left(\frac{\partial Z_c}{\partial \beta} \right)^2 \quad (2.73)$$

Dengan membandingkan persamaan (2.72) dan (2.73) kita simpulkan

$$\begin{aligned} \overline{\delta E^2} &= \frac{\partial E}{\partial \beta} = kT^2 \frac{\partial E}{\partial T} \\ &= kT^2 C_v \end{aligned} \quad (2.74)$$

Tampak dari persamaan (2.74) bahwa besarnya fluktuasi energi bergantung pada kapasitas kalor yang dimiliki assembl. Makin besar kapasitas kalor maka makin besar fluktuasi energi yang terjadi. Fluktuasi energi juga naik secara kuadratik terhadap suhu. **Gambar 2.11** adalah ilustrasi fluktuasi energi assembl.

Contoh 2.7

Tentukan fluktuasi energi assembl momen magnetik pada **Contoh 2.1** jika assembl tersebut dibiarkan kontak dengan udara luar.

Jawab

Karena dibiarkan kontak dengan udara luar maka bisa muncul aliran energi dari atau ke assembl sehingga energi assembl bisa berubah.

Assembl yang kita miliki menjadi kanonik. Kita sudah turunkan di **Contoh 2.1** maupun **Contoh 2.4** bahwa energi assembl tersebut adalah

$$E = N\mu B \tanh(\beta\mu B) = N\mu B \tanh\left(-\frac{\mu B}{kT}\right) = -N\mu B \tanh\left(\frac{\mu B}{kT}\right)$$

Kapasitas kalor assembl adalah

$$C_v = \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{N\mu^2 B^2}{kT^2} \left[1 - \tanh^2\left(\frac{\mu B}{kT}\right) \right]$$

Fluktuasi energi assembl adalah

$$\overline{\delta E^2} = kT^2 C_v = N\mu^2 B^2 \left[1 - \tanh^2\left(\frac{\mu B}{kT}\right) \right]$$

Tampak dari hasil di atas bahwa jika suhu sangat tinggi, maka $\mu B/kT \rightarrow 0$

sehingga $\tanh(\mu B/kT) \rightarrow \mu B/kT$. Pada kondisi tersebut fluktuasi energi memenuhi $\overline{\delta E^2} \approx (1 - \mu^2 B^2 / k^2 T^2)$. Sebaliknya, pada suhu sangat rendah maka $\mu B/kT \rightarrow \infty$ sehingga $\tanh(\mu B/kT) \rightarrow 1$. Akibatnya fluktuasi energi memenuhi $\overline{\delta E^2} \rightarrow 0$.

Latihan

1. Sebuah assembli kanonik disusun oleh sistem-sistem yang memiliki dua keadaan energi. Keadaan pertama memiliki energi E_0 dan degenerasi g_0 dan keadaan kedua memiliki energi E_1 dan degenerasi g_1 . Berdasarkan informasi tersebut tentukan

- Fungsi partisi satu sistem
- Fungsi partisi kanonik assembli tersebut yang mengandung N sistem
- Tentukan kapasitas kalor assembli
- Buat grafik C/R (rasio kapasitas kalor terhadap konstanta gas) sebagai fungsi T/θ , di mana $\theta = (E_1 - E_0)/k$ pada berbagai nilai rasio g_1/g_0 .

2. Sebuah assembli disusun oleh sistem identik. Tiap sistem memiliki energi potensial satu dimensi yang berbentuk $V(x) = A|x|^s$ dengan A dan s adalah konstanta. Dengan menerapkan skala panjang ℓ yang memenuhi hubungan $(2\pi\ell^2/\hbar^2)A\ell^2 = 1$ maka energi yang dimiliki sistem terkuantisasi menurut persamaan

$$E_n = \varepsilon \left\{ \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(3/2 + 1/s)}{\Gamma(1 + 1/s)} (n + 1/2) \right\}^{2s/(s+2)}$$

dengan $\varepsilon = \hbar^2/2m\ell^2$ dan $\Gamma(x)$ adalah fungsi gamma [U. P. Sukhatme, *American Journal of Physics* **41**, 1015 (1973)]. Perhatikan bahwa energi tersebut kembali menjadi tingkat energi osilator harmonik jika $s = 2$

- Tentukan nilai aproksimasi untuk fungsi partisi satu sistem
- Tentukan juga nilai aproksimasi untuk fungsi partisi assembli yang mengandung N sistem (*)

3. *Populasi jantan-betina dan pria-wanita di alam seimbang.* Dalam menyelesaikan

perosialan statistik kita sering menjumpai bentuk

$$W(N, n) = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

Bentuk ini menyatakan jumlah cara penyusunan N sistem yang terdiri dari dua benda atau dua keadaan. Keadaan (benda) pertama mempunyai jumlah n dan keadaan (benda) kedua mempunyai jumlah $(N-n)$. Contohnya adalah assembli magnetik yang tersusun oleh dua orientasi spin atau alloy yang tersusun oleh dua atom atau populasi yang sangat besar yang terdiri dari jantan dan betina. Yang selanjutnya kita lakukan adalah mencari nilai n yang menyebabkan $W(N, n)$ memiliki nilai maksimal. Cara yang sering ditempuh adalah mendiferensial W terhadap n lalu mencari solusi untuk n yang menyebabkan turunan tersebut nol. Karena fungsi W sulit didiferensial langsung maka seringkali yang didiferensial adalah $\ln W = \ln N! - \ln n! - \ln (N-n)!$. Jika diasumsikan bahwa N dan n sangat besar maka kita dapat memakai pendekatan Stirling, yaitu $\ln N! \approx N \ln N - N$, $\ln n! \approx n \ln n - n$, dan $\ln (N-n)! \approx (N-n) \ln (N-n) - (N-n)$. Setelah pendekatan ini maka diferensial mudah dilakukan dan solusi untuk n yang menyebabkan $W(N, n)$ maksimal dapat diperoleh. Cara lain adalah dengan mempertimbangkan fungsi $W(N, n)$ itu sendiri. Misalkan fungsi tersebut maksimal pada n_0 maka pada semua nilai $n \neq n_0$ terpenuhi $W(N, n) \leq W(N, n_0)$. Salah satu contohnya adalah $W(N, n_0-1) \leq W(N, n_0)$ dan $W(N, n_0+1) \leq W(N, n_0)$. Dengan menggunakan dua ketidaksamaan ini ke dalam ungkapan $W(N, n)$ di atas, buktikan bahwa $n_0 = N/2$ dengan asumsi bahwa n_0 maupun N sangat besar dibandingkan dengan satu. Hasil ini menginformasikan kepada kita bahwa jika ada populasi di alam yang disusun oleh dua keadaan maka secara alamiah jumlah tiap keadaan adalah sama atau hampir sama. Ini barangkali penyebab bahwa jumlah populasi jantan atau betina untuk hewan sejenis di alam hampir sama. Itu juga barangkali penyebab mengapa jumlah laki-laki dan perempuan di dunia ini hampir sama.

4. Sebuah assembli kanonik mengandung sistem berupa osilator harmonik tiga dimensi. Energi osilator tersebut memenuhi persamaan $\epsilon_{rst} = (r+s+t+3/2)\hbar\omega$ di mana

r , s , dan t adalah bilangan bulat dari 0 sampai ∞ .

- Tuliskan fungsi partisi kanonik assembly tersebut dan sederhanakan sehingga diperoleh bentuk analitik
- Carilah nilai asimptotik fungsi partisi pada suhu sangat rendah ($T \ll \hbar\omega/k$) dan pada suhu sangat tinggi ($T \gg \hbar\omega/k$).
- Hitunglah energi rata-rata sistem dan nilai aproksimasi energi pada suhu sangat rendah dan sangat tinggi
- Hitunglah kapasitas kalor assembly pada volum tetap dan nilai aproksimasi kapasitas kalor tersebut pada suhu sangat rendah dan sangat tinggi.

5. Penurunan fungsi distribusi tanpa aproksimasi Stirling dan pengali Lagrange.

Pada penurunan fungsi distribusi Maxwell-Boltzmann, Bose-Einstein, dan Fermi-Dirac kita telah menggunakan aproksimasi Stirling dan pengali Lagrange. Turoff memperlihatkan bahwa kita dapat menurunkan fungsi distribusi tersebut tanpa menggunakan keduanya [R.D. Turoff, *American Journal of Physics* **38**, 387 (1970)]. Di sini akan diberikan penurunan untuk fungsi distribusi Maxwell-Boltzmann. Penurunan fungsi distribusi Bose-Einstein dan Fermi-Dirac kalian coba lakukan sendiri.

Jumlah konfigurasi penyusunan sistem dalam assembly klasik memenuhi

$$W = N! \prod_{s=1}^N \frac{g_s^{n_s}}{n_s!}$$

Dari jumlah konfigurasi ini kita langsung mendapatkan ungkapan untuk entropi $S = k \ln W$. Persamaan di atas dapat diuraikan sebagai berikut

$$W = N! \frac{g_1^{n_1}}{n_1!} \times \dots \times \frac{g_p^{n_p}}{n_p!} \times \dots \times \frac{g_q^{n_q}}{n_q!} \times \dots \times \frac{g_N^{n_N}}{n_N!}$$

Sekarang ke dalam assembly kita berikan sedikit energi sehingga ada satu sistem berpindah dari tingkat energi ke- p ke tingkat energi ke- q . Energi yang kita berikan adalah

$$dU = \varepsilon_q - \varepsilon_p$$

Dengan pemberian energi tersebut maka populasi pada tingkat ke- p berkurang satu dan populasi pada tingkat energi ke- q bertambah satu. Dengan demikian konfigurasi baru menjadi

$$\begin{aligned} W' &= N! \frac{g_1^{n_1}}{n_1!} \times \dots \times \frac{g_1^{n_p-1}}{(n_p-1)!} \times \dots \times \frac{g_q^{n_q+1}}{(n_q+1)!} \times \dots \times \frac{g_N^{n_N}}{n_N!} \\ &= N! \frac{g_1^{n_1}}{n_1!} \times \dots \times \frac{g_1^{n_p}}{n_p!} \times \dots \times \frac{g_q^{n_q}}{n_q!} \times \dots \times \frac{g_N^{n_N}}{n_N!} \times \left(\frac{g_q}{n_q+1} \times \frac{n_p}{g_p} \right) \\ &= W \times \left(\frac{g_q}{n_q+1} \times \frac{n_p}{g_p} \right) \end{aligned}$$

Entropi assembli dalam konfigurasi baru menjadi

$$S' = k \ln W' = k \ln W + k \ln \left(\frac{g_q}{n_q+1} \times \frac{n_p}{g_p} \right)$$

Dengan demikian, perubahan entropi akibat penambahan energi tersebut adalah

$$dS = S' - S = k \ln \left(\frac{g_q}{n_q+1} \times \frac{n_p}{g_p} \right)$$

Karena $n_q \gg 1$ maka

$$dS \approx k \ln \left(\frac{g_q}{n_q} \times \frac{n_p}{g_p} \right) = k \ln \left(\frac{g_q/n_q}{g_p/n_p} \right)$$

Dari kuliah termodinamika kita dapatkan definisi suhu adalah

$$T = \frac{\partial U}{\partial S} \approx \frac{dU}{dS}$$

atau

$$\varepsilon_q - \varepsilon_p = kT \ln \left(\frac{g_q / n_q}{g_p / n_p} \right)$$

atau

$$\frac{g_q / n_q}{g_p / n_p} = \frac{\exp(\varepsilon_q / kT)}{\exp(\varepsilon_p / kT)}$$

Karena kita bisa memilih p dan q sembarang maka hubungan di atas melahirkan persamaan berikut ini

$$\frac{n_q}{g_q} = A \exp(-\varepsilon_q / kT)$$

Ini tidak lain daripada fungsi distribusi Maxwell-Boltzmann. Lakukan penurunan yang sama untuk mencari fungsi distribusi Bose-Einstein dan Fermi-Dirac. Jumlah konfigurasi dalam assemblasi boson dan fermion masing-masing

$$W_b = \prod_{s=1}^N \frac{(n_s + g_s - 1)!}{n_s! (g_s - 1)!}$$

$$W_f = \prod_{s=1}^N \frac{g_s!}{n_s! (g_s - n_s)!}$$

Bab 3

ENSEMBEL GRAND KANONIK

Setelah mempelajari cukup banyak tentang ensemble mikrokanonik pada kuliah Fisika Statistik dan ensemble kanonik pada bab sebelumnya, pada bab ini kita akan membahas ensemble jenis ketiga, yaitu ensemble grand kanonik. Pada ensemble grand kanonik tidak ada batasan pada energi maupun jumlah sistem pada sebuah assembly. Pembatasan hanya dikenakan pada suhu dan volum assembly tersebut, yaitu dua besaran tersebut konstan. Ensemble ini lebih mendekati kebanyakan kasus nyata, seperti gas atau partikel di tempat terbuka. Kita akan membahas ensemble grand kanonik dengan menggunakan sejumlah analogi dengan ensemble mikrokanonik maupun ensemble kanonik. Analogi seperti ini dilakukan untuk mempermudah pemahaman.

Untuk memahami uraian dalam bab ini para mahasiswa seyogyanya sudah memahami materi assembly kanonik yang dibahas pada bab sebelumnya. Mereview kembali materi Fisika Statistik serta Termodinamika akan mempermudah mengikuti uraian dalam bab ini.

3.1 Energi Bebas Helmholtz dan Gibbs

Kita berangkat dari hukum I termodinamika yang tidak lain merupakan hukum kekekalan energi. Pembahasan ini kita lakukan karena ada beberapa persamaan dalam hukum I ini yang akan menolong kita memahami penurunan ensemble grand kanonik lebih mudah. Hukum I termodinamika dapat ditulis $dE = dQ + dW$, dengan dE adalah pertambahan energi dalam yang dimiliki assembly, dQ

adalah tambahan kalor yang diberikan pada assembli, dan dW adalah kerja yang diberikan pada assembli. Hukum ini menyatakan bahwa pertambahan energi dalam yang dimiliki assembli sama dengan kalor yang diberikan pada assembli dan kerja yang dilakukan pada assembli.

Untuk proses yang berlangsung secara reversibel, maka ada hubungan antara kalor yang diberikan dan perubahan entropi, yaitu $dS = dQ/T$. Lebih lanjut, kerja yang dilakukan pada assembli memenuhi $dW = -pdV$, di mana p adalah tekanan yang bekerja pada assembli dan V adalah volum assembli. Dengan demikian, untuk proses yang berlangsung secara reversible, hukum I termodinamika dapat ditulis menjadi $dE = TdS - pdV$.

Jika jumlah sistem pada assembli tidak tetap maka ada kemungkinan terjadi pertambahan dan pengurangan sistem dalam assembli tersebut. Pertambahan dan pengurangan tersebut akan memengaruhi energi dalam yang dimiliki assembli. Misalkan pertambahan satu sistem menghasilkan perubahan energi μ dan pengurangan satu sistem menyebabkan pengurangan energi μ maka perubahan dN sistem menghasilkan perubahan energi dalam sistem sebesar μdN . Dengan demikian, perubahan energi dalam assembli jika jumlah sistem diijinkan untuk berubah menjadi

$$dE = TdS - pdV + \mu dN \quad (3.1)$$

Secara umum, misalkan ada beberapa jenis sistem dalam assembli yang dapat masuk atau keluar assembli dengan energi per sistem untuk jenis partikel ke- i adalah μ_i maka hukum I termodinamika mengambil bentuk umum

$$dE = TdS - pdV + \sum_i \mu_i dN_i \quad (3.2)$$

Kita batasi persoalan kita pada kondisi di mana suhu, tekanan, dan μ yang konstan. Dengan melakukan integral pada persamaan (3.1) kita dapatkan

$$E = TS - pV + \mu N \quad (3.3)$$

Berdasarkan definisi energi bebas Helmholtz $F = E - TS$ dan persamaan (3.3) kita dapatkan ungkapan lain untuk energi bebas tersebut sebagai berikut

$$F = -pV + \mu N \quad (3.4)$$

Energi Gibbs didefinisikan sebagai $G = F + pV$. Dengan menggunakan persamaan (3.4) maka energi Gibbs memiliki bentuk

$$G = \mu N \quad (3.5)$$

Dari persamaan (3.5) kita peroleh $\mu = \partial G / \partial N$, yang bermakna bahwa μ dapat dipandang sebagai energi Gibbs per satuan jumlah sistem. Besaran ini sering juga disebut **potensial kimia**.

3.2 Penurunan Besaran Termodinamika dari Entropi

Ketika kita menyelesaikan persoalan fisika statistik atau mekanika statistik, langkah pertama yang sering ditempuh adalah menentukan jumlah total konfigurasi yang dapat terjadi. Jumlah total konfigurasi tersebut berhubungan langsung dengan entropi assembli. Jika W adalah jumlah total konfigurasi maka entropi assembli dapat didefinisikan sebagai $S = k \ln W$. Dengan demikian, memahami keterkaitan entropi dengan besaran termodinamika lain menjadi sangat penting. Dengan kata lain, kemampuan mendapatkan besaran-besaran termodinamika lain dari entropi sangat penting guna mendapatkan persamaan termodinamika bagi assembli. Kita akan mencari hubungan tersebut pada bagian ini.

Mari kita lihat kembali persamaan (3.1). Persamaan tersebut dapat ditulis menjadi $TdS = dE + pdV - \mu dN$, atau

$$dS = \frac{1}{T} dE + \frac{p}{T} dV - \frac{\mu}{T} dN \quad (3.6)$$

Jika S dinyatakan sebagai fungsi E , V , dan N atau $S(E,V,N)$ maka diferensial total dari S selalu dapat ditulis sebagai

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N} dE + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{E,N} dV + \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{V,E} dN \quad (3.7)$$

Jika kita bandingkan persamaan (3.6) dan (3.7) maka kita akan dapatkan kumpulan hubungan berikut ini

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N} \quad (3.8)$$

$$\frac{p}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{E,N} \quad (3.9)$$

$$-\frac{\mu}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{V,E} \quad (3.10)$$

Tampak dari persamaan (3.8) sampai (3.10) bahwa apabila kita telah mendapatkan fungsi entropi, maka besaran lain termodinamika seperti suhu, tekanan, dan potensial kimia dapat ditentukan dengan mudah melalui operasi diferensial parsial sederhana.

3.3 Fungsi Grand Partisi

Sekarang mari kita mulai menurunkan fungsi grand partisi. Dalam ensemble grand kanonik, keadaan suatu assembli ke- i merupakan fungsi dari energi E_i dan jumlah sistem N_i dari assembli tersebut. Makin besar energi assembli maka makin kecil peluang mendapatkan assembli tersebut. Sebaliknya, makin banyak jumlah sistem dalam assembli maka makin banyak konfigurasi yang dapat dihasilkan sehingga makin besar peluang kemunculan assembli tersebut. Dengan demikian, kebolehjadian menemukan assembli ke- i memenuhi hubungan: $p_i \propto \exp[-E_i/\theta]$ dan $p_i \propto \exp[\xi N_i/\theta]$ dengan ξ dan θ adalah parameter yang akan ditentukan. Kesebandingan pertama jelas menghasilkan probabilitas makin kecil

jika energi makin besar dan kesebandingan kedua menghasilkan probabilitas makin besar jika jumlah sistem makin besar. Dua kesebandingan tersebut dapat disatukan menjadi $p_i \propto \exp[(-E_i + \mu N_i)/\theta]$. Jika kita menggunakan tanda *sama dengan* maka kita masukkan konstanta pembanding sehingga diperoleh $p_i = C \exp[(-E_i + \mu N_i)/\theta]$. Selanjutnya, untuk mempermudah bentuk fungsi probabilitas, kita definisikan parameter baru yang memenuhi hubungan berikut $C = \exp[\chi/\theta]$. Dengan memasukkan ungkapan dalam parameter baru tersebut kita dapatkan ungkapan untuk probabilitas menemukan assembli dengan energi E_i dan jumlah sistem N_i sebagai berikut

$$p_i = e^{(\chi + \xi N_i - E_i)/\theta} \quad (3.11)$$

Catatan: untuk ensemble kanonik di mana energi assembli bisa berbeda-beda sedangkan jumlah sistem tetap maka kebolehjadian untuk menemukan assembli dengan energi E_i adalah $p_i \propto \exp[-E_i/\theta]$.

Untuk menentukan parameter-parameter χ , ξ , dan θ pada persamaan (3.11) mari kita bandingkan probabilitas pada persamaan (3.11) dengan ungkapan probabilitas dalam assembli kanonik, yaitu

$$p = e^{(F - E)/kT} \quad (2.20)$$

Dengan membandingkan persamaan (3.11) dan (2.20) maka sangat logis apabila kita menyamakan parameter berikut ini, $\theta = kT$ dan $F = \chi + \xi N$. Tetapi, dari persamaan (3.4) kita sudah mendapatkan bentuk energi bebas Helmholtz ensemble grand kanonik, yaitu $F = -pV + \mu N$. Dengan demikian kita bisa simpulkan lagi bahwa $\chi = -pV$ dan $\xi = \mu$. Akhirnya kebolehjadian menemukan assembli dengan energi E_i dan jumlah sistem N_i adalah

$$p_i = e^{(-pV + \mu N_i - E_i)/kT} \quad (3.12)$$

Dengan menggunakan hubungan normalisasi maka $\sum_i e^{(-pV + \mu N_i - E_i)/kT} = 1$. Kita keluarkan parameter yang tidak mengandung indeks dari tanda penjumlahan sehingga diperoleh

$$e^{-pV/kT} \sum_i e^{(\mu N_i - E_i)/kT} = 1 \quad (3.13)$$

Selanjutnya kita mendefinisikan fungsi grand partisi sebagai berikut

$$Z_G = \sum_i e^{(\mu N_i - E_i)/kT} \quad (3.14)$$

Dengan mensubstitusi persamaan (3.14) ke dalam persamaan (3.13) kita dapatkan $e^{-pV/kT} Z_G = 1$, atau

$$Z_G = e^{pV/kT} \quad (3.15)$$

atau

$$pV = kT \ln Z_G \quad (3.16)$$

Persamaan (3.16) adalah persamaan keadaan untuk assembli grand kanonik. Kita masih ingat persamaan gas ideal $pV = NkT$. Kalau kita bandingkan persamaan gas ideal dengan persamaan (3.16) maka dapat kita simpulkan bahwa untuk gas ideal, $\ln Z_G = N$ atau $Z_G = \exp(N)$. Berdasarkan definisi fungsi grand partisi (3.15) maka probabilitas p_i pada persamaan (3.12) dapat ditulis sebagai $p_i = e^{-pV/kT} e^{(\mu N_i - E_i)/kT}$, atau

$$p_i = \frac{e^{(\mu N_i - E_i)/kT}}{Z_G} \quad (3.17)$$

3.4 Ungkapan Alternatif

Karena jumlah sistem dalam assembli grand kanonik bisa berubah-ubah maka cara lain mendefinisikan fungsi grand partisi adalah dengan memperhitungkan berbagai kemungkinan jumlah sistem pada masing-masing assembli. Dengan pendekatan ini maka fungsi partisi grand kanonik bisa didefinisikan sebagai

$$Z_G = \sum_N \sum_i e^{(\mu N - E_{i,N})/kT} \quad (3.18)$$

Persamaan (3.18) sebenarnya setara dengan persamaan (3.14). Pada persamaan (3.14) penjumlahan dilakukan pada berbagai kemungkinan energi dan pada energi yang berbeda bisa saja memiliki N yang sama. Bisa saja terjadi $E_2 \neq E_{99}$, tetapi $N_2 = N_{99}$. Alternatif lain adalah kita kumpulkan assembli yang memiliki jumlah sistem yang sama. Tentu energi tiap assembli tersebut berbeda. Penjumlahan pada energi yang berbeda dilakukan untuk jumlah assembli yang sama. Jadi, penjumlahan yang dilakukan adalah $\sum_i e^{(\mu N - E_{i,N})/kT}$. Setelah itu kita jumlahkan untuk berbagai nilai N sehingga diperoleh persamaan (3.18).

3.5 Entropi dalam Ungkapan Probabilitas

Selanjutnya kita akan mencari ungkapan untuk entropi dikaitkan dengan kebolehjadian munculnya masing-masing assembli. Pertama mari kita lihat bentuk eksplisit dari $-k \sum_i p_i \ln p_i$. Dengan menggunakan p_i pada persamaan (3.12) maka

$$\begin{aligned} -k \sum_i p_i \ln p_i &= -k \sum_i p_i \left(\frac{-pV + \mu N_i + E_i}{kT} \right) \\ &= \frac{pV}{T} \sum_i p_i - \frac{\mu}{T} \sum_i p_i N_i - \frac{1}{T} \sum_i p_i E_i \end{aligned}$$

$$= \frac{pV - \mu\bar{N} - \bar{E}}{T} \quad (3.19)$$

di mana \bar{N} adalah jumlah rata-rata sistem dalam satu assembli dan \bar{E} adalah energi rata-rata satu assembli. Nilai-nilai tersebut diperoleh setelah merata-ratakan pada semua assembli dalam ensemble grand kanonik.

Kita mengingat salah satu persamaan termodinamika $E = TS - pV + \mu N$ yang dapat ditulis dalam bentuk

$$S = \frac{pV - \mu N - E}{T} \quad (3.20)$$

Jika kita bandingkan persamaan (3.19) dan (3.20) kita simpulkan bahwa ungkapan lain untuk entropi adalah

$$S = -k \sum_i p_i \ln p_i \quad (3.21)$$

Catatan: Dalam teori komunikasi didefinisikan juga entropi dengan perumusan yang persis sama. Misalkan X adalah himpunan pesan $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. Misalkan $p(x)$ adalah probabilitas x terkandung dalam himpunan tersebut, maka entropi didefinisikan sebagai

$$S = - \sum_{x \in X} p(x) \ln p(x)$$

3.6 Besaran Termodinamika dari Fungsi Grand Partisi

Untuk proses yang berlangsung secara reversible, kita memiliki persamaan $pV = TS + \mu\bar{N} - \bar{E}$. Jika kita diferensiasi dua ruas persamaan ini maka diperoleh

$$d(pV) = TdS + SdT + \mu d\bar{N} + \bar{N}d\mu - d\bar{E} \quad (3.22)$$

Berdasarkan hukum I termodinamika proses reversible memiliki hubungan $d\bar{E} = TdS - p dV + \mu d\bar{N}$. Dengan demikian persamaan (3.22) dapat diubah menjadi

$$d(pV) = p dV + S dT + \bar{N} d\mu \quad (3.23)$$

Persamaan (3.23) mengindikasikan bahwa perkalian (pV) merupakan fungsi dari V , T , dan μ . Jika $pV(V, T, \mu)$ kita diferensiasi terhadap tiga variable tersebut maka diperoleh

$$d(pV) = \left(\frac{\partial(pV)}{\partial V} \right)_{T, \mu} dV + \left(\frac{\partial(pV)}{\partial T} \right)_{V, \mu} dT + \left(\frac{\partial(pV)}{\partial \mu} \right)_{V, T} d\mu \quad (3.24)$$

Bandingkan persamaan (3.23) dan (3.24). Dengan mudah kita identifikasi hubungan-hubungan berikut ini

$$p = \left(\frac{\partial(pV)}{\partial V} \right)_{T, \mu} \quad (3.26)$$

$$S = \left(\frac{\partial(pV)}{\partial T} \right)_{V, \mu} \quad (3.27)$$

$$\bar{N} = \left(\frac{\partial(pV)}{\partial \mu} \right)_{V, T} \quad (3.28)$$

Dari persamaan (3.16) kita dapat menulis $pV = kT \ln Z_G$. Substitusi bentuk ini ke dalam persamaan (3.26) sampai (3.28) kita peroleh bentuk persamaan berikut ini

$$p = \left(\frac{\partial(kT \ln Z_G)}{\partial V} \right)_{T, \mu} = kT \left(\frac{\partial(\ln Z_G)}{\partial V} \right)_{T, \mu} \quad (3.29)$$

$$S = \left(\frac{\partial(kT \ln Z_G)}{\partial T} \right)_{V, \mu} = k \ln Z_G + kT \left(\frac{\partial(\ln Z_G)}{\partial T} \right)_{V, \mu} \quad (3.30)$$

$$\bar{N} = \left(\frac{\partial(kT \ln Z_G)}{\partial \mu} \right)_{V, T} = kT \left(\frac{\partial(\ln Z_G)}{\partial \mu} \right)_{V, T} \quad (3.31)$$

Tampak dari persamaan (3.29) sampai (3.31) bahwa untuk mendapatkan ungkapan untuk fungsi grand partisi merupakan kunci untuk menurunkan besaran termodinamika yang lain. Oleh karena itu, ketika membahas sejumlah assembli terbuka para ahli akan selalu memulai dengan menurunkan fungsi grand partisi. Begitu fungsi grand partisi dapat dibangun maka besaran termodinamika lain dapat diturunkan melalui proses diferensial sederhana.

3.7 Perhitungan Fungsi Grand Partisi

Pada semua pembahasan di atas kita baru menulis ungkapan untuk fungsi grand partisi dan operasi apa yang mesti dilakukan untuk mendapatkan besaran termodinamika lain dari fungsi grand partisi tersebut. Namun, fungsi grand partisi sendiri belum secara eksplisit diturunkan. Pada bagian ini kita akan menurunkan bentuk eksplisit fungsi grand partisi untuk assembli klasik, boson, dan fermion.

Partikel Semiklasik dalam Formulasi Sumasi

Tinjau assembli yang memiliki energi E_i dan jumlah sistem N_i . Jumlah sistem pada masing-masing kelompok energi dalam assembli tersebut adalah n_{i1} , n_{i2} , n_{i3} , ... dan energi kelompok-kelompok tersebut adalah ϵ_{i1} , ϵ_{i2} , ϵ_{i3} , Energi total assembli dan jumlah total sistem dalam assembli ke- i memenuhi

$$N_i = \sum_s n_{is}$$

$$E_i = \sum_s n_{is} \epsilon_{is}$$

Dengan demikian fungsi grand partisi pada persamaan (3.14) dapat ditulis menjadi

$$Z_G = \sum_i W_i \exp \left[\frac{\mu N_i - E_i}{kT} \right] \quad (3.32)$$

dengan W_i adalah bobot konfigurasi assembli ke- i (jumlah cara penyusunan

system-sistem dalam assembli ke- i).

Untuk sistem semiklasik kita sudah mendapatkan persamaan untuk jumlah konfigurasi, yaitu

$$W_i = \prod_s \frac{g_{is}^{n_{is}}}{n_{is}!}$$

Substitusi ungkapan ini ke dalam persamaan (3.32) diperoleh

$$Z_G = \sum_i \prod_s \frac{g_{is}^{n_{is}}}{n_{is}!} \exp\left[\frac{\mu N_i - E_i}{kT}\right] \quad (3.33)$$

Tetapi $\mu N_i - E_i = \mu \sum_s n_{is} - \sum_s \varepsilon_{is} n_{is}$. Dengan demikian $\exp[(\mu N_i - E_i)/kT] =$

$\exp[\mu \sum_s n_{is} - \sum_s \varepsilon_{is} n_{is}]/kT = \exp[\sum_s n_{is}(\mu - \varepsilon_{is})/kT] = \prod_s (\exp[(\mu - \varepsilon_{is})/kT])^{n_{is}}$. Substitusi

hubungan ini ke dalam persamaan (3.33) diperoleh

$$\begin{aligned} Z_G &= \sum_i \prod_s \frac{g_{is}^{n_{is}}}{n_{is}!} \prod_s (\exp[(\mu - \varepsilon_{is})/kT])^{n_{is}} \\ &= \sum_i \left(\prod_s \frac{(g_{is} e^{(\mu - \varepsilon_{is})/kT})^{n_{is}}}{n_{is}!} \right)_i \end{aligned} \quad (3.34)$$

Catatan: Sebelum kita lanjutkan penyederhanaan persamaan (3.34), mari kita lihat aturan berikut ini. Kita memiliki hubungan matematis berikut ini

$$\left(\sum_s x_s \right)^N = \sum_{n_1 + n_2 + \dots = N} N! \prod_s \frac{x_s^{n_s}}{n_s!}$$

atau dapat ditulis balik menjadi

$$\sum_{n_1+n_2+\dots=N} \prod_s \frac{x_s^{n_s}}{n_s!} = \frac{1}{N!} \left(\sum_s x_s \right)^N \quad (3.35)$$

Selanjutnya ruas kiri dan kanan kita jumlahkan terhadap N dari $N = 0$ sampai $N = \infty$ sehingga diperoleh

$$\sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n_1+n_2+\dots=N} \prod_s \frac{x_s^{n_s}}{n_s!} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \left(\sum_s x_s \right)^N \quad (3.36)$$

Jika kita mengganti $x_s = g_{is} e^{(\mu - \epsilon_{is})/kT}$ maka

$$\sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n_1+n_2+\dots=N} \prod_s \frac{(g_{is} e^{(\mu - \epsilon_{is})/kT})^{n_s}}{n_s!} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \left(\sum_s g_{is} e^{(\mu - \epsilon_{is})/kT} \right)^N \quad (3.37)$$

Ruas kiri persamaan (3.27) dapat ditulis ulang menjadi

$$\sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n_1+n_2+\dots=N} \prod_s \frac{(g_{is} e^{(\mu - \epsilon_{is})/kT})^{n_s}}{n_s!} = \sum_{N=0}^{\infty} \left(\prod_s \frac{(g_{is} e^{(\mu - \epsilon_{is})/kT})^{n_s}}{n_s!} \right)_N$$

di mana simbol $(\dots)_N$ memiliki makna bahwa bagian dalam tanda kurung dijumlahkan pada semua konfigurasi yang memiliki jumlah total sistem N . Dengan demikian persamaan (3.37) menjadi

$$\sum_{N=0}^{\infty} \left(\prod_s \frac{(g_{is} e^{(\mu - \epsilon_{is})/kT})^{n_s}}{n_s!} \right)_N = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \left(\sum_s g_{is} e^{(\mu - \epsilon_{is})/kT} \right)^N \quad (3.38)$$

Ruas kiri persamaan (3.38) persis sama dengan ungkapan fungsi grand partisi pada persamaan (3.34). Dengan demikian kita dapatkan ungkapan lain untuk grand partisi adalah

$$\begin{aligned}
Z_G &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \left(\sum_s g_{is} e^{(\mu - \varepsilon_{is})/kT} \right)^N \\
&= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \left(e^{\mu/kT} \sum_s g_{is} e^{-\varepsilon_{is}/kT} \right)^N = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \left(e^{\mu/kT} Z \right)^N \\
&= \exp \left[Z e^{\mu/kT} \right]
\end{aligned} \tag{3.39}$$

di mana $Z = \sum_s g_{is} e^{-\varepsilon_{is}/kT}$. Tampak bahwa fungsi grand partisi untuk assembli semiklasik menjadi sangat sederhana. Besaran Z dalam persamaan (3.39) adalah fungsi partisi sebuah sistem. Jadi fungsi grand partisi dapat ditentukan dari fungsi partikel satu sistem. Dengan kata lain, untuk mencari fungsi grand partisi assembli semiklasik kita cukup mencari fungsi partisi untuk satu sistem kemudian menggunakan persamaan (3.39) untuk mencari fungsi grad partisi.

Dengan menggunakan fungsi grand partisi pada persaman (3.39) maka jumlah rata-rata sistem dalam assembli adalah

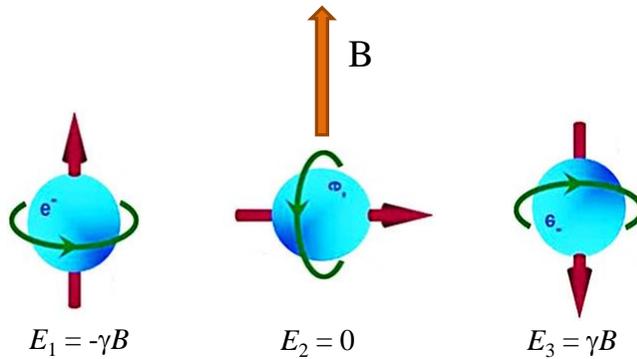
$$\begin{aligned}
\bar{N} &= kT \left(\frac{\partial \ln Z_G}{\partial \mu} \right)_{V,T} \\
&= kT \left(\frac{\partial (Z e^{\mu/kT})}{\partial \mu} \right)_{V,T} = kT \left(\frac{1}{kT} Z e^{\mu/kT} \right) \\
&= Z e^{\mu/kT}
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Contoh 3.1

Kita ingin mencari fungsi grand partisi assembli momen magnetik yang berada dalam medan magnet. Momen tersebut memiliki tiga kemungkinan arah orientasi: searah, tegak lurus, atau berlawanan arah medan magnet.

Jawab

Gambar di bawah ini adalah kemungkinan arah orientasi tiap momen magnetik dan energi yang dimiliki untuk tiap arah orientasi tersebut.



Pada gambar di atas γ adalah besar momen magnetik. Fungsi partisi satu sistem adalah

$$Z = \sum_i e^{-E_i/kT} = e^{-E_1/kT} + e^{-E_2/kT} + e^{-E_3/kT}$$

$$= e^{\gamma B/kT} + 1 + e^{-\gamma B/kT}$$

Fungsi grand partisi menjadi

$$Z_G = \exp[Z e^{\mu/kT}] = \exp[e^{\mu/kT} (1 + e^{\gamma B/kT} + e^{-\gamma B/kT})]$$

Persamaan keadaan assembli tersebut adalah

$$\frac{PV}{kT} = \ln Z_G = e^{\mu/kT} (1 + e^{\gamma B/kT} + e^{-\gamma B/kT})$$

Dengan menggunakan persamaan (3.40) kita dapatkan rata-rata sistem dalam assembli adalah

$$\bar{N} = Z e^{\mu/kT}$$

$$= e^{\mu/kT} (1 + e^{\gamma B/kT} + e^{-\gamma B/kT})$$

Jumlah Okupasi Rata-rata

Jika \bar{n}_s adalah jumlah rata-rata sistem pada kelompok energi ke- s dalam suatu assembli maka jumlah rata-rata sistem dalam suatu assembli dapat ditulis

$$\bar{N} = \sum_s \bar{n}_s . \quad (3.41)$$

Sekarang kita balik ke definisi fungsi partisi satu partikel yang memenuhi persamaan $Z = \sum_s g_s e^{-\varepsilon_s/kT}$. Bentuk ini jika digabung dengan persamaan (3.40) maka kita dapatkan ungkapan lain untuk jumlah rata-rata partikel dalam assembli sebagai

$$\bar{N} = \sum_s g_s e^{-\varepsilon_s/kT} e^{\mu/kT} = \sum_s g_s e^{(\mu-\varepsilon_s)/kT} \quad (3.42)$$

Sekarang kita bandingkan definisi pada persamaan (3.41) dengan ungkapan pada persamaan (3.42). Dari dua persamaan tersebut kita simpulkan bahwa jumlah rata-rata sistem dalam kelompok energi ke- s dalam suatu assembli di dalam ensemble grand kanonik adalah

$$\bar{n}_s = g_s e^{(\mu-\varepsilon_s)/kT} \quad (3.43)$$

Persamaan (3.43) cukup menarik untuk dicermati. Pada ensemble mikrokanonik (jumlah energi dan sistem tetap), jumlah sistem yang menempati keadaan dengan energi ε_s adalah $n_s = g_s \exp[\alpha - \varepsilon_s/kT]$. Namun pada ensemble grand kanonik (jumlah energi maupun sistem dalam assembli selalu berubah-ubah) maka jumlah sistem yang menempati keadaan dengan energi ε_s selalu berubah-ubah. Tetapi nilai rata-rata sistem yang menempati keadaan dengan energi ε_s memenuhi persamaan (3.43), yang persis sama dengan jumlah sistem pada ensemble mikrokanonik. Jadi, pada assembli grand kanonik, yang dapat kita definisikan adalah harga rata-rata, karena harga sesaat selalu berubah. Dan harga rata-rata tersebut sama dengan harga sesaat untuk ensemble mikrokanonik.

Partikel Semiklasik dalam Formulasi Integral

Untuk mencari bentuk integral dari fungsi grand partisi partikel semi klasik mari kita mulai dari persamaan (3.24) $Z_G = \sum_N \sum_i e^{(\mu N - E_{i,N})/kT}$. Kita mentransformasi penjumlahan \sum_i ke bentuk integral dengan cara sebagai berikut: $\sum_i (...) = \int (...) \Omega_N d\Gamma_{6N}$, dengan Ω_N adalah kerapatan keadaan. Untuk assembli semiklasik kerapatan keadaan memenuhi $\Omega_N = 1/N! h^{3N}$. Dengan demikian bentuk integral dari fungsi grand partisi semiklasik mengambil bentuk

$$\begin{aligned} Z_G &= \sum_N \frac{1}{N! h^{3N}} \int e^{[\mu N - E(N)]/kT} d\Gamma_{6N} \\ &= \sum_N \frac{1}{N! h^{3N}} e^{\mu N/kT} \int e^{-E(N)/kT} d\Gamma_{6N} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Kasus khusus. Untuk kasus khusus di mana interaksi antar partikel diabaikan maka $E(N)$ hanya mengandung energi kinetik dan memenuhi persamaan $E(N) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N (p_{ix}^2 + p_{iy}^2 + p_{iz}^2)$. Dengan demikian kita dapat menyelesaikan integral berikut ini,

$$\begin{aligned} \int e^{-E(N)/kT} d\Gamma_{6N} &= \int e^{-E(N)/kT} \prod_i dx_i dy_i dz_i dp_{ix} dp_{iy} dp_{iz} \\ &= \int \prod_i dx_i dy_i dz_i \int \exp \left[-\frac{\sum_i p_{ix}^2 + p_{iy}^2 + p_{iz}^2}{2mkT} \right] \prod_i dp_{ix} dp_{iy} dp_{iz} \\ &= V^N \prod_i \left(\int \exp \left[-\frac{p_{ix}^2}{2mkT} \right] dp_{ix} \right) \\ &\quad \times \left(\int \exp \left[-\frac{p_{iy}^2}{2mkT} \right] dp_{iy} \right) \left(\int \exp \left[-\frac{p_{iz}^2}{2mkT} \right] dp_{iz} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= V^N \prod_i \left(\sqrt{2\pi mkT} \right) \left(\sqrt{2\pi mkT} \right) \left(\sqrt{2\pi mkT} \right) \\
&= V^N (2\pi mkT)^{3N/2} \tag{3.45}
\end{aligned}$$

Untuk kasus khusus ini fungsi grand partisi memiliki bentuk

$$\begin{aligned}
Z_G &= \sum_N \frac{1}{N! h^{3N}} e^{\mu N/kT} V^N (2\pi mkT)^{3N/2} \\
&= \sum_N \frac{1}{N!} e^{\mu N/kT} \left(\frac{V}{h^3} 2\pi mkT \right)^{3N/2} = \sum_N \frac{1}{N!} e^{\mu N/kT} Z^N \\
&= \sum_N \frac{1}{N!} (Z e^{\mu/kT})^N = \exp[Z e^{\mu/kT}]
\end{aligned}$$

Persamaan di atas tidak lain merupakan persamaan (3.40). Pada hasil di atas, $Z = [(V/h^3)2\pi mkT]^{3/2}$ adalah fungsi partisi satu partikel.

Fungsi Grand partisi Bose-Einstein

Sekarang kita akan membahas fungsi partisi untuk assembli kuantum, yaitu untuk assembli boson dan fermion. Pertama kita bahas fungsi partisi Bose-Einstein untuk assembli boson. Untuk menentukan fungsi grand partisi Bose-Einstein mari kita mulai dengan meninjau deret ukur berikut ini

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x_j} &= 1 + x_j + x_j^2 + x_j^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} x_j^n \\
\prod_j \left(\frac{1}{1-x_j} \right) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_j^n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_j^n \right) \dots \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_j^n \right) \\
&= \sum_{n_1, n_2, n_3, \dots} x_j^{n_1} x_j^{n_2} x_j^{n_3} \dots \\
&= \sum_{n_1, n_2, n_3, \dots} \left(\prod_j x_j^{n_j} \right) \tag{3.46}
\end{aligned}$$

Selanjutnya kita misalkan $x_j = e^{(\mu - \epsilon_j)/kT}$ sehingga kita dapat menulis (3.46)

menjadi

$$\begin{aligned} \prod_j \left(\frac{1}{1 - e^{(\mu - \varepsilon_j)/kT}} \right) &= \sum_{n_1, n_2, n_3, \dots} \left(\prod_j \left[e^{(\mu - \varepsilon_j)/kT} \right]^{n_j} \right) \\ &= \sum_{n_1, n_2, n_3, \dots} \exp \left[\sum_j n_j (\mu - \varepsilon_j) / kT \right] \end{aligned} \quad (3.47)$$

Telah didefinisikan bahwa fungsi grand partisi memenuhi bentuk umum

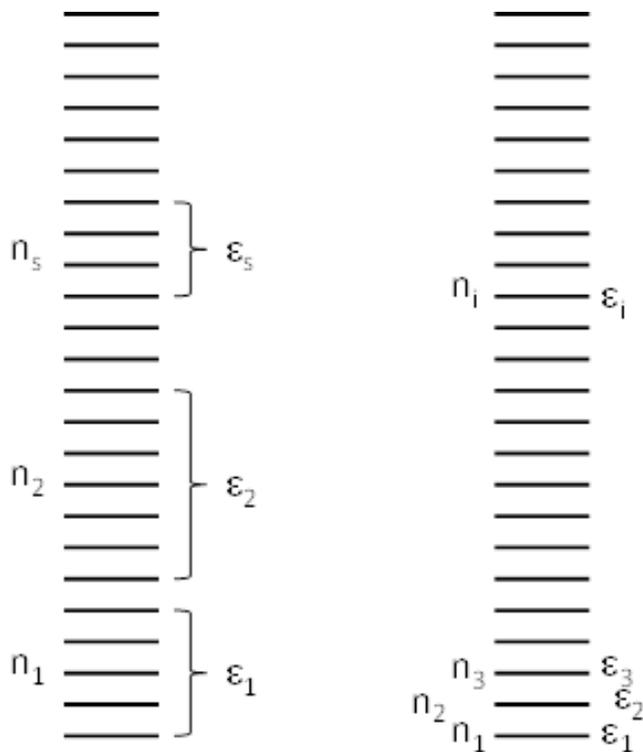
$$Z_G = \sum_i W_i \exp \left[\sum_s n_{is} (\mu - \varepsilon_{is}) / kT \right] \quad (3.34)$$

di mana s adalah indeks kelompok energi. Tetapi penjumlahan $\sum_s n_{is} (\mu - \varepsilon_{is}) / kT$ terhadap kelompok-kelompok energi memberikan hasil yang persis sama dengan penjumlahan $\sum_j n_j (\mu - \varepsilon_j) / kT$ terhadap keadaan individual. Perbedaan hanya pada jumlah suku yang dijumlahkan. Jumlah suku pada penjumlahan yang terakhir lebih banyak daripada jumlah suku pada penjumlahan pertama (lihat **Gambar 3.1**). Jadi

$$\sum_s n_{is} (\mu - \varepsilon_{is}) / kT = \sum_j n_j (\mu - \varepsilon_j) / kT \quad (3.48)$$

Lebih lanjut, karena boson merupakan partikel tak terbedakan maka jumlah cara penyusunan boson-boson pada keadaan ke- i hanya satu, berapa pun jumlah boson yang menempati keadaan tersebut. Dengan demikian, untuk boson $W_i = 1$ sehingga fungsi grand partisi pada persamaan (3.34) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} Z_G &= \sum_{n_1, n_2, \dots} 1 \times \exp \left[\sum_j n_j (\mu - \varepsilon_j) / kT \right] \\ &= \sum_{n_1, n_2, \dots} \exp \left[\sum_j n_j (\mu - \varepsilon_j) / kT \right] \end{aligned} \quad (3.49)$$



$$\sum_s n_{is} (\mu - \varepsilon_{is}) / kT = \sum_j n_j (\mu - \varepsilon_j) / kT$$

Gambar 3.1 Pada bagian kiri keadaan dikelompokkan.

Penjumlahan di sebelah kiri adalah penjumlahan per kelompok sedangkan penjumlahan di sebelah kanan adalah penjumlahan per tingkat energi. Hasilnya sama saja. Pada gambar kiri, n_s menyatakan jumlah sistem dalam satu kelompok (yang mencakup sejumlah keadaan). Pada gambar kanan, n_i adalah jumlah sistem pada satu keadaan.

Perlu diingat bahwa penjumlahan yang semula dilakukan terhadap indeks- j diubah menjadi penjumlahan terhadap indeks n_j karena tiap n_j berkorelasi dengan satu nilai j . Bandingkan persamaan (3.48) dan (3.49). Dari sini kita dapat simpulkan bahwa fungsi grand partisi untuk boson dapat ditulis sebagai

$$Z_G = \prod_j \left(\frac{1}{1 - e^{(\mu - \varepsilon_j)/kT}} \right) \quad (3.50)$$

Tampak dari persamaan (3.50) bahwa fungsi grand partisi boson cukup sederhana. Untuk mencari fungsi grand partisi kita awali dengan mencari tingkat-tingkat energi dalam assembli tersebut (ε_j). Tingkat energi inilah yang digunakan untuk menentukan fungsi grand partisi.

Pesan umum yang dapat diperoleh di sini adalah, apapun jenis assembli yang kita miliki, mencari fungsi partisi atau grand partisi diawali dengan mencari tingkat-tingkat energi. Setelah tingkat energi diketahui maka fungsi partisi kanonik maupun partisi grand kanonik dapat dihitung dengan mudah.

Pada persamaan (3.50) ada parameter μ sedangkan pada fungsi partisi kanonik atau mikrokanonik tidak ada. Penyebabnya adalah karena adanya pertukaran sistem pada assembli grand kanonik. Pertukaran satu sistem melahirkan perubahan energi sebesar μ . Pada assembli kanonik atau mikrokanonik, tidak ada pertukaran partikel sehingga tidak masuk parameter μ dalam ungkapan fungsi partisi.

Dari fungsi grand partisi (3.50) kita dapat menghitung jumlah rata-rata sistem dalam assembli, yaitu

$$\begin{aligned} \bar{N} &= kT \left(\frac{\partial \ln Z_G}{\partial \mu} \right)_{V,T} \\ &= kT \left(\frac{\partial \left[- \sum_j \ln \left(1 - e^{(\mu - \varepsilon_j)/kT} \right) \right]}{\partial \mu} \right)_{V,T} \end{aligned}$$

$$= \sum_j \frac{e^{(\mu - \varepsilon_j)/kT}}{1 - e^{(\mu - \varepsilon_j)/kT}} = \sum_j \frac{1}{e^{(\varepsilon_j - \mu)/kT} - 1} \quad (3.51)$$

Tetapi jumlah rata-rata sistem dalam assembli sama dengan jumlah dari jumlah rata-rata sistem pada tiap keadaan energi, atau

$$\bar{N} = \sum_j \bar{n}_j \quad (3.32)$$

dengan \bar{n}_j adalah jumlah rata-rata sistem yang menempati keadaan energi ke- j dalam suatu assembli. Dengan membandingkan persamaan (3.51) dan (3.32) kita simpulkan bahwa jumlah rata-rata sistem pada keadaan ke- j adalah

$$\bar{n}_j = \frac{1}{e^{(\varepsilon_j - \mu)/kT} - 1} \quad (3.52)$$

Persamaan (3.52) juga cukup menarik untuk dicermati. Pada assembli mikrokanonik (jumlah energi dan sistem tetap), jumlah sistem yang menempati satu keadaan (keadaan ke- j) dengan energi ε_j adalah $n_j = \frac{1}{e^{(\varepsilon_j - \alpha kT)/kT} - 1}$. Namun pada assembli grand kanonik (jumlah energi maupun sistem dalam assembli selalu berubah-ubah) maka jumlah sistem yang menempati keadaan dengan energi ε_j selalu berubah-ubah. Tetapi nilai rata-rata sistem yang menempati keadaan dengan energi ε_j memenuhi persamaan (3.52). Pada assembli grand kanonik, yang dapat kita definisikan adalah harga rata-rata, karena harga sesaat selalu berubah. Dan harga rata-rata tersebut sama dengan harga sesaat untuk assembli mikrokanonik.

Fungsi Grand Partisi Fermi-Dirac

Terakhir kita mencari fungsi partisi Fermi-Dirac. Kita sudah mendapatkan bentuk fungsi grand partisi sistem kuantum yaitu persamaa (3.34). Untuk fermion, satu keadaan energi hanya boleh kosong atau ditempati satu sistem saja karena memenuhi prinsip ekslusi Pauli. Jadi untuk fermion n_j hanya boleh 0 atau 1.

Sebelum itu kita bahas hubungan berikut ini

$$\prod_j (1 + x_j) = 1 + \sum_j x_j + \sum_j \sum_{\ell > j} x_j x_\ell + \sum_j \sum_{\ell > j} \sum_{m > \ell} x_j x_\ell x_m + \dots \quad (3.53)$$

Mengingat n_1, n_2, n_3, \dots untuk fermion hanya bisa mengambil nilai 0 atau 1 maka bagian kanan persamaan (3.53) dapat disederhanakan menjadi

$$\sum_{n_1, n_2, n_3, \dots, (0,1)} \left(\prod_j x_j^{n_j} \right)$$

Sebagai contoh

$$\begin{aligned} 1 &= x_1^0 x_2^0 \dots x_j^0 \dots x_N^0 \\ x_j &= x_1^0 x_2^0 \dots x_{j-1}^0 x_j^1 x_{j+1}^0 \dots x_N^0 \\ x_j x_\ell &= x_1^0 x_2^0 \dots x_{j-1}^0 x_j^1 x_{j+1}^0 \dots x_{\ell-1}^0 x_\ell^1 x_{\ell+1}^0 \dots x_N^0 \end{aligned}$$

Dengan demikian persamaan (3.53) dapat ditulis ulang menjadi

$$\prod_j (1 + x_j) = \sum_{n_1, n_2, n_3, \dots, (0,1)} \left(\prod_j x_j^{n_j} \right) \quad (3.54)$$

Jika kita mensubstitusi $x_j = e^{(\mu - \varepsilon_j)/kT}$ pada persamaan (3.54) maka

$$\begin{aligned} \prod_j (1 + e^{(\mu - \varepsilon_j)/kT}) &= \sum_{n_1, n_2, n_3, \dots, (0,1)} \left(\prod_j (e^{(\mu - \varepsilon_j)/kT})^{n_j} \right) \\ &= \sum_{n_1, n_2, n_3, \dots, (0,1)} \exp \left[\sum_j n_j (\mu - \varepsilon_j) / kT \right] \end{aligned} \quad (3.55)$$

Perhatikan bagian kanan persamaan (3.55). Kita dapat menulis ulang sebagai berikut

$$\begin{aligned}
& \sum_{n_1, n_2, n_3, \dots, (0,1)} \exp \left[\sum_j n_j (\mu - \varepsilon_j) / kT \right] \\
&= \sum_{n_1, n_2, n_3, \dots, (0,1)} \exp \left[\frac{\mu \sum_j n_j - \sum_j n_j \varepsilon_j}{kT} \right] \\
&= \sum_{n_1, n_2, n_3, \dots, (0,1)} \exp \left[\frac{\mu N_i - E_i}{kT} \right]
\end{aligned}$$

Substitusi ke dalam persamaan (3.55) kita peroleh

$$\prod_j \left(1 + e^{(\mu - \varepsilon_j) / kT} \right) = \sum_{n_1, n_2, n_3, \dots, (0,1)} \exp \left[\frac{\mu N_i - E_i}{kT} \right] \quad (3.56)$$

Jika kita perhatikan persamaan (3.56) tampak jelas bahwa bagian kanan persamaan (3.56) adalah fungsi grand partisi. Akhirnya kita simpulkan bahwa fungsi grand partisi fermion dapat ditulis dalam bentuk

$$Z_G = \prod_j \left(1 + e^{(\mu - \varepsilon_j) / kT} \right) \quad (3.57)$$

Sekarang kita hitung jumlah rata-rata sistem yang menempati keadaan ke- j . Kita mulai dengan menghitung jumlah rata-rata sistem dalam suatu assembli, yaitu

$$\begin{aligned}
\bar{N} &= kT \left(\frac{\partial \ln Z_G}{\partial \mu} \right)_{V, T} \\
&= kT \left(\frac{\partial \left[\sum_j \ln \left(1 + e^{(\mu - \varepsilon_j) / kT} \right) \right]}{\partial \mu} \right)_{V, T}
\end{aligned}$$

$$= \sum_j \frac{e^{(\mu - \varepsilon_j)/kT}}{1 + e^{(\mu - \varepsilon_j)/kT}} = \sum_j \frac{1}{e^{(\varepsilon_j - \mu)/kT} + 1} \quad (3.58)$$

Sekali lagi, jumlah rata-rata sistem dalam assembli sama dengan jumlah dari jumlah rata-rata sistem pada tiap keadaan energi, atau

$$\bar{N} = \sum_j \bar{n}_j \quad (3.32)$$

Dengan membandingkan persamaan (3.32) dan (3.58) kita simpulkan bahwa jumlah rata-rata sistem pada keadaan ke- j adalah

$$\bar{n}_j = \frac{1}{e^{(\varepsilon_j - \mu)/kT} + 1} \quad (3.59)$$

Mengingat jumlah sistem dalam satu keadaan assembli fermion hanya boleh 0 atau 1 maka akan selalu terpenuhi $0 \leq \bar{n}_j \leq 1$.

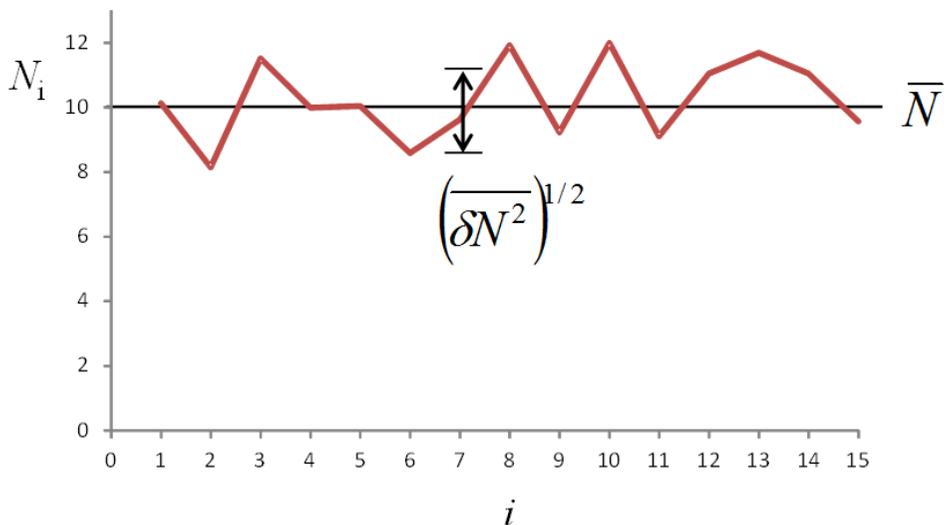
Persamaan (3.59) juga cukup menarik untuk dicermati. Pada assembli mikrokanonik (jumlah energi dan sistem tetap), jumlah sistem yang menempati satu keadaan (keadaan ke- j) dengan energi ε_j adalah $n_j = \frac{1}{e^{(\varepsilon_j - \mu)/kT} + 1}$. Namun pada assembli grand kanonik (jumlah energi maupun sistem dalam assembli selalu berubah-ubah) maka jumlah sistem yang menempati keadaan dengan energi ε_j selalu berubah-ubah. Tetapi nilai rata-rata sistem yang menempati keadaan dengan energi ε_j memenuhi persamaan (3.59). Pada assembli grand kanonik, yang dapat kita definisikan adalah harga rata-rata, karena harga sesaat selalu berubah. Dan harga rata-rata tersebut sama dengan harga sesaat untuk assembli mikrokanonik.

Hal menarik lainnya yang perlu kita cermati adalah mengapa fungsi grand partisi diungkapkan dalam bentuk perkalian Π ? Apakah tidak mempersulit? Mengapa bukan dalam tanda Σ ? Jawabannya tegas tidak. Karena yang sering kita gunakan dalam mencari besaran termodinamika bukan fungsi partisi itu sendiri, tetapi logaritma fungsi partisi. Kita tahu semua bahwa logaritma perkalian sama

dengan jumlah logaritma. Jadi, ketika fungsi grand partisi yang kita miliki berbentuk Π , namun ketika kita gunakan dalam mencari besaran termodinamika kita akan dapatkan bentuk penjumlahan (setelah dilogaritma).

3.8 Fluktuasi Jumlah Sistem dalam Assembli

Seperti dijelaskan sebelumnya, ensemble grand kanonik mengijinkan terjadinya perubahan jumlah sistem dalam suatu assembli. Dengan kata lain pada ensemble ini diijinkan terjadinya fluktuasi jumlah sistem. Pada assembli kanonik yang kita bahas pada bab terdahulu, fluktuasi energi yang dimiliki assembli diijinkan. Berikut ini kita akan merumuskan fluktuasi jumlah sistem dalam ensemble grand kanonik (lihat **Gambar 3.2**).



Gambar 3.2 Ilustrasi fluktuasi jumlah partikel dalam assembli. Sumbu datar menyatakan assembli ke- i sedangkan sumbu vertikal adalah jumlah partikel yang dimiliki masing-masing assembli. Garis mendatar adalah jumlah rata-rata partikel pada assembli. Indeks i pada sumbu datar adalah indeks assembli.

Fluktuasi jumlah sistem dalam assembli didefinisikan sebagai

$$\overline{(\delta N)^2} = \overline{N^2} - \overline{N}^2 \quad (3.60)$$

Untuk mencari bentuk eksplisit persamaan (3.60) kita berangkat dari definisi berikut ini

$$\begin{aligned} \overline{N} &= \sum_i N_i p_i = \sum_i N_i \frac{e^{(\mu N_i - E_i)/kT}}{Z_G} \\ &= \frac{1}{Z_G} \sum_i N_i e^{(\mu N_i - E_i)/kT} = kT \left(\frac{\partial \ln Z_G}{\partial \mu} \right) \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\overline{N^2} = \sum_i N_i^2 p_i = \sum_i N_i^2 \frac{e^{(\mu N_i - E_i)/kT}}{Z_G} = \frac{(kT)^2}{Z_G} \left(\frac{\partial^2 Z_G}{\partial \mu^2} \right) \quad (3.62)$$

Dengan demikian

$$\begin{aligned} \overline{N^2} - \overline{N}^2 &= \frac{(kT)^2}{Z_G} \left(\frac{\partial^2 Z_G}{\partial \mu^2} \right) - (kT)^2 \frac{1}{Z_G^2} \left(\frac{\partial Z_G}{\partial \mu} \right)^2 \\ &= (kT)^2 \left\{ \frac{1}{Z_G} \left(\frac{\partial^2 Z_G}{\partial \mu^2} \right) - \frac{1}{Z_G^2} \left(\frac{\partial Z_G}{\partial \mu} \right)^2 \right\} \\ &= (kT)^2 \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ \frac{1}{Z_G} \frac{\partial Z_G}{\partial \mu} \right\} = kT \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ kT \frac{1}{Z_G} \frac{\partial Z_G}{\partial \mu} \right\} \\ &= kT \frac{\partial}{\partial \mu} Z_G \end{aligned} \quad (3.63)$$

Fungsi grand partisi untuk sistem klasik memenuhi persamaan (3.41), $Z_G = \exp[Z e^{\mu/kT}]$. Dengan menggunakan persamaan (3.61) kita dapatkan

$\bar{N} = kT \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z_G = kT \frac{\partial}{\partial \mu} (Ze^{\mu/kT}) = Ze^{\mu/kT}$. Dengan demikian,

$\partial \bar{N} / \partial \mu = (1/kT)Ze^{\mu/kT} = \bar{N} / kT$. Akhirnya kita dapatkan

$$\overline{N^2} - \bar{N}^2 = kT \times \frac{\bar{N}}{kT} = \bar{N}$$

dan

$$\overline{(\delta N)^2} = \bar{N} \tag{3.64}$$

Fluktuasi jumlah sistem dalam assembli didefinisikan sebagai

$$\wp = \left(\frac{\overline{(\delta N)^2}}{\bar{N}^2} \right)^{1/2} = \left(\frac{\bar{N}}{\bar{N}^2} \right)^{1/2} = (\bar{N})^{-1/2} \tag{3.65}$$

Tampak bahwa fluktuasi berbanding lurus dengan kebalikan akar rata-rata jumlah sistem dalam assembli.

3.9 Penurunan Fungsi Fermi-Dirac dengan Metode Perturbasi

Cara lain menurunkan fungsi distribusi fermi-dirac adalah menggunakan teori perturbasi yang bergantung waktu. Metode ini telah dibahas oleh Walsh [J.E. Walsh, *American Journal of Physics* **38**, 392(1970)]. Kita akan bahas metode tersebut lebih detail di sini.

Kita misalkan

- P_{21} adalah probabilitas per satuan waktu transisi elektron dari tingkat energi ε_2 ke tingkat energi ε_1 .
- P_{12} adalah probabilitas per satuan waktu transisi elektron dari tingkat energi ε_1 ke tingkat energi ε_2 .

Dengan teori perturbasi maka probabilitas transisi per satuan waktu dari energi ε_2 ke tingkat energi ε_1 memenuhi persamaan

$$P_{21} = \frac{2\pi}{h} |M_{21}|^2 [n(\omega) + 1] f(\varepsilon_2) [1 - f(\varepsilon_1)] \delta(\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \hbar\omega) \quad (3.66)$$

dengan M_{21} adalah elemen matrik dipol transisi dari keadaan 2 ke keadaan 1, $n(\omega)$ adalah jumlah rata-rata foton yang memiliki frekuensi ω dalam assembli sebelum transisi dari ε_2 ke ε_1 dan memenuhi persamaan $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \hbar\omega$. $f(\varepsilon)$ adalah peluang mendapatkan elektron pada tingkat energi ε dan $1 - f(\varepsilon)$ adalah peluang tingkat energi ε tidak ditempati elektron.

Persamaan (3.66) menyatakan bahwa probabilitas transisi sebanding dengan peluang mendapatkan elektron di keadaan awal dan peluang mendapatkan tempat kosong di keadaan akhir. Kita juga menambahkan faktor $n(\omega)+1$ karena transisi dari tingkat energi ε_2 ke ε_1 menambah jumlah foton sebanyak satu buah. Fungsi delta Dirac menjamin bahwa foton yang dipancarkan memiliki energi persis sama dengan selisih energi keadaan awal dan akhir.

Dengan cara serupa maka peluang per satuan waktu transisi elektron dari keadaan dengan energi ε_1 ke ε_2 adalah

$$P_{12} = \frac{2\pi}{h} |M_{12}|^2 n(\omega) f(\varepsilon_1) [1 - f(\varepsilon_2)] \delta(\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \hbar\omega) \quad (3.67)$$

Pada persamaan (3.67), transisi dari ε_1 ke ε_2 (dari tingkat energi rendah ke tinggi) tidak mengubah jumlah foton dalam assembli sehingga pada persamaan kita hanya menggunakan faktor $n(\omega)$.

Dalam kondisi setimbang $P_{12} = P_{21}$. Karena operator momen dipol M bersifat hermitian maka $|M_{12}| = |M_{21}|$. Dengan demikian, kondisi setimbang melahirkan persamaan berikut ini

$$[n(\omega) + 1] f(\varepsilon_2) [1 - f(\varepsilon_1)] = n(\omega) f(\varepsilon_1) [1 - f(\varepsilon_2)]$$

atau

$$\frac{n(\omega)}{n(\omega)+1} = \frac{f(\varepsilon_2)/[1-f(\varepsilon_2)]}{f(\varepsilon_1)/[1-f(\varepsilon_1)]} \quad (3.68)$$

Untuk memudahkan perhitungan mari kita definisikan fungsi berikut ini

$$g(\varepsilon) = \frac{f(\varepsilon)}{1-f(\varepsilon)} \quad (3.69)$$

Dengan definisi tersebut maka persamaan (3.68) dapat ditulis

$$\frac{n(\omega)}{n(\omega)+1} = \frac{g(\varepsilon_2)}{g(\varepsilon_1)} \quad (3.70)$$

Perhatikan suku di ruas kiri persamaan (3.70). Suku tersebut hanya fungsi ω .

Karena $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \hbar\omega$ maka suku di ruas kiri persamaan (3.70) hanya fungsi $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$.

Berdasarkan sifat tersebut maka persamaan (3.70) dapat ditulis menjadi

$$\frac{g(\varepsilon_2)}{g(\varepsilon_1)} = \Psi(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$$

atau

$$g(\varepsilon_2) = \Psi(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)g(\varepsilon_1) \quad (3.71)$$

dengan $\Psi(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$ adalah fungsi yang hanya bergantung pada selisih $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$.

Berdasarkan definisi tersebut kita dapatkan $\Psi(0) = 1$.

Mari kira tulis $\varepsilon_1 = \varepsilon$ dan $\varepsilon_2 = \varepsilon + \delta\varepsilon$. Dengan demikian kita dapat menulis persamaan (3.71) menjadi

$$g(\varepsilon + \delta\varepsilon) = \Psi(\delta\varepsilon)g(\varepsilon) \quad (3.72)$$

Kemudian kita uraikan fungsi-fungsi dalam dalam deret Taylor sebagai berikut

$$g(\varepsilon + \delta\varepsilon) \approx g(\varepsilon) + \frac{dg}{d\varepsilon} \delta\varepsilon$$

$$\Psi(\delta\varepsilon) \approx \Psi(0) + \left. \frac{d\Psi}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \delta\varepsilon$$

Kita definisikan juga $d\Psi/d\varepsilon|_{\varepsilon=0} = \beta$ sehingga dapat kita tulis $\Psi(\delta\varepsilon) \approx 1 + \beta\delta\varepsilon$. Dengan demikian, persamaan (3.72) menjadi

$$g(\varepsilon) + \frac{dg}{d\varepsilon} \delta\varepsilon = (1 + \beta\delta\varepsilon)g(\varepsilon)$$

atau

$$\frac{dg}{d\varepsilon} = \beta g(\varepsilon) \tag{3.73}$$

Dengan mudah kita dapatkan solusi untuk $g(\varepsilon)$ sebagai berikut

$$g(\varepsilon) = A e^{\beta\varepsilon} \tag{3.74}$$

dengan A adalah konstan. Kembali ke definisi $g(\varepsilon)$ pada persamaan (3.69) kita dapatkan ungkapan untuk $f(\varepsilon)$ sebagai berikut

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{(1/A)e^{-\beta\varepsilon} + 1} \tag{3.75}$$

Kita menulis $1/A$ sebagai $\exp[\beta\mu]$ sehingga diperoleh ungkapan akhir untuk $f(\varepsilon)$ menjadi

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{-\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} \tag{3.76}$$

Persamaan (3.76) tidak lain daripada fungsi distribusi Fermi-Dirac.

Bab 4

MEKANIKA STATISTIK KUANTUM

Setelah cukup banyak membahas statistik yang berbasis pada formulasi klasik, sekarang kita membangun statistik yang berangkat dari postulat kuantum. Walaupun kita telah mempelajari assembly boson dan fermion yang merupakan partikel kuantum, namun "interpretasi" statistik yang kita gunakan masih berbasis pada interpretasi klasik. Salah satu ciri khas sistem kuantum yang direpresentasikan oleh fungsi gelombang belum muncul pada pembahasan sebelumnya. Pada bagian ini kita mempelajari statistik yang berangkat dari postulat kuantum.

Untuk memahami bagian ini secara mudah para mahasiswa diharapkan meriew kembali kuliah Fisika Statistik dan Fisika Kuantum. Pemahaman tentang operator serta beberapa sifat dasar operator, operator *bra* dan *ket*, operator fungsi kerapatan, *trace*, dan lain-lain cukup penting untuk dipahami sebagai modal awal.

4.1 Fungsi Gelombang Sistem dan Liungkungan

Kita berangkat dari konsep gelombang dari partikel. Pada sembarang waktu, fungsi gelombang Ψ suatu sistem terisolasi dapat diungkapkan sebagai superposisi linier dari kumpulan ortonormal lengkap dari fungsi gelombang stasioner $\{\phi_n\}$, yaitu

$$\Psi = \sum_n c_n \phi_n \quad (4.1)$$

dengan c_n adalah bilangan kompleks. Secara umum c_n merupakan fungsi waktu. Kebergantungan Ψ pada waktu ditentukan oleh kebergantungan c_n pada waktu karena $\{\phi_n\}$ bersifat stasioner. Indeks n adalah bilangan kuantum untuk keadaan-keadaan yang dimiliki assembly. Interpretasi dari c_n adalah nilai $|c_n|^2$ menyatakan bahwa

Probabilitas pengukuran yang dilakukan pada saat tertentu menemukan sistem pada keadaan kuantum n

Catatan: Fungsi ortonormal artinya modulusnya sama dengan 1. Yang dimaksud dengan lengkap adalah setiap fungsi sembarang selalu dapat dinyatakan sebagai superposisi himpunan fungsi yang lengkap tersebut. Fungsi yang berbeda hanya pada kumpunan konstanta superposisi.

Namun, dalam mekanika statistik, yang kita bahas bukan assembli yang terisolasi melainkan assembli yang berinteraksi dengan lingkungan (dunia luar). Dengan demikian, untuk assembli statistik sebenarnya superposisi pada persamaan (4.1) tidak dapat langsung dipakai. Namun demikian kita dapat melakukan strategi agar persamaan (4.1) tetap dapat digunakan. Caranya adalah memandang assembli dengan lingkungan sebagai sebuah assembli baru. Karena tidak ada lagi yang lain di luar gabungan assembli dan lingkungan maka gabungan assembli dan lingkungan dapat dipandang sebagai assembli terisolasi yang baru.

ASSEMBLI + LINGKUNGAN = ASSEMBLI TERISOLASI BARU

Dengan trik demikian maka ungkapan fungsi gelombang pada persamaan (4.1) tetap dapat digunakan, namun dengan melakukan sedikit reinterpretasi. Di sini fungsi gelombang tidak lagi bergantung pada koordinat assembli tetapi juga bergantung pada koordinal lingkungan.

Dengan pendekatan semacam ini kita memiliki berbagai asumsi berikut ini. Jika $\{\phi_n\}$ menyatakan kumpulan lengkap fungsi gelombang stasioner yang dimiliki **assembli** maka fungsi gelombang **assembli + lingkungan** tetap berbentuk $\Psi = \sum_n c_n \phi_n$, dengan menafsirkan $\{c_n\}$ sebagai fungsi gelombang lingkungan. Jadi kita memiliki dua macam fungsi gelombang, yaitu:

- Himpunan $\{\phi_n\}$ bergantung pada koordinat assembli dan
- Himpunan $\{c_n\}$ bergantung pada koordinat lingkungan dan waktu.

Dengan demikian, fungsi gelombang total merupakan superposisi dari perkalian fungsi gelombang assembli dengan fungsi gelombang lingkungan.

4.2 Nilai Rata-Rata

Dalam teori kuantum kita sering berhadapan dengan operator. Nilai suatu besaran fisis sama dengan nilai ekspektasi dari operator terkait. Jika \hat{O} adalah sebuah operator yang berkaitan dengan sebuah observable (besaran yang dapat

diamati) yang dimiliki assemblasi maka nilai besaran tersebut yang terukur pada suatu saat adalah

$$\frac{\langle \Psi | \hat{O} | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} = \frac{\sum_n \sum_m (c_n, c_m) \langle \phi_n | \hat{O} | \phi_m \rangle}{\sum_n \sum_m (c_n, c_m) \langle \phi_n | \phi_m \rangle} \quad (4.2)$$

Karena $\{\phi_n\}$ adalah himpunan fungsi gelombang ortonormal maka $\langle \phi_n | \phi_m \rangle = \delta_{nm}$. Dengan sifat demikian maka kita mendapatkan

$$\begin{aligned} \frac{\langle \Psi | \hat{O} | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} &= \frac{\sum_n \sum_m (c_n, c_m) \langle \phi_n | \hat{O} | \phi_m \rangle}{\sum_n \sum_m (c_n, c_m) \delta_{nm}} \\ &= \frac{\sum_n \sum_m (c_n, c_m) \langle \phi_n | \hat{O} | \phi_m \rangle}{\sum_n (c_n, c_n)} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Proses pengukuran biasanya memerlukan waktu yang cukup lama jika dibandingkan dengan waktu "proses molekuler/atomik" tetapi jauh lebih pendek dibandingkan dengan waktu yang berkaitan dengan "resolusi alat ukur". Dengan demikian, besaran sebenarnya yang diperoleh dari hasil pengukuran adalah perata-rataan besaran tersebut terhadap selang waktu yang lebih lama dari waktu proses molekuler dan lebih pendek dari waktu resolusi alat. Jadi, besaran yang didapat dari hasil pengukuran sebenarnya bukan (4.3) itu sendiri, melainkan perata-rataan (4.3) terhadap waktu, yaitu

$$\langle \hat{O} \rangle = \left(\frac{\sum_n \sum_m (c_n, c_m) \langle \phi_n | \hat{O} | \phi_m \rangle}{\sum_n (c_n, c_n)} \right) \quad (4.4)$$

Karena variabel waktu hanya tertuang dalam fungsi c_n maka kita dapat menulis ulang persamaan (4.4) menjadi

$$\langle \hat{O} \rangle = \frac{\sum_n \sum_m \overline{(c_n, c_m)} \langle \phi_n | \hat{O} | \phi_m \rangle}{\sum_n \overline{(c_n, c_n)}} \quad (4.5)$$

Sekarang kita tinjau suatu assembli yang memiliki volum V . Assembli tersebut dianggap berinteraksi cukup lemah dengan lingkungan sehingga energinya hanya bervariasi antara E sampai $E+\Delta$ di mana $\Delta \ll E$. Kita pilih $\{\phi_n\}$ sebagai himpunan fungsi eigen ortonormal dari hamiltonian H assembli tersebut, yaitu

$$H\phi_n = E_n\phi_n \quad (4.5)$$

4.3 Postulat Mekanika Statistik Kuantum

Ada dua postulat yang melandasi mekanika statistik kuantum, yaitu

Postulat "Equal a Priori Probability"

Postulat ini menyatakan bahwa semua keadaan kuantum memiliki peluang yang sama untuk muncul. Lebih lanjut, tidak ada keadaan yang memiliki energi kurang dari E atau lebih dari $E+\Delta E$ karena energi assembli hanya ada dalam rentang E sampai $E+\Delta E$. Postulat tersebut dapat dituangkan dalam ekspresi matematika sebagai berikut

$$\overline{(c_n, c_n)} = \begin{cases} 1, & E < E_n < E + \Delta \\ 0, & E_n < E \text{ atau } E_n > E + \Delta \end{cases} \quad (4.6a)$$

Postulat Fase Random

Postulat ini menyatakan bahwa kemunculan satu keadaan tidak mempengaruhi oleh kemunculan keadaan lainnya. Artinya tiap keadaan muncul secara random dari tidak mempengaruhi atau dipengaruhi oleh keadaan lainnya. Secara matematis, postulat tersebut dinyatakan oleh ekspresi berikut ini,

$$\overline{(c_n, c_m)} = 0, \quad n \neq m \quad (4.6b)$$

Catatan: Jikan munculnya satu keadaan dipengaruhi oleh keadaan lainnya maka $\overline{(c_n, c_m)} \neq 0$.

Dua postulat di atas dapat diungkapkan dalam satu ekspresi umum sebagai berikut

$$\overline{(c_n, c_m)} = \begin{cases} \delta_{nm} |b_n|^2, & E < E_n < E + \Delta \\ 0, & E_n < E \text{ atau } E_n > E + \Delta \end{cases} \quad (4.7)$$

Dengan menggunakan persamaan (4.7) maka persamaan (4.5) dapat ditulis menjadi

$$\langle \hat{O} \rangle = \frac{\sum_n \sum_m \delta_{nm} |b_n|^2 \langle \phi_n | \hat{O} | \phi_m \rangle}{\sum_n |b_n|^2} = \frac{\sum_n |b_n|^2 \langle \phi_n | \hat{O} | \phi_n \rangle}{\sum_n |b_n|^2} \quad (4.8)$$

4.4 Matriks Kerapatan

Sebuah operator terdefinisi secara lengkap jika semua elemen matriksnya terhadap suatu himpunan keadaan yang lengkap telah terdefinisi. Jika ini diketahui maka elemen matriks terhadap himpunan keadaan lengkap lainnya dapat diketahui melalui transformasi sederhana (transformasi tersebut sangat umum dibahas pada kuliah mekanika kuantum). Kita dapat menentukan matriks kerapatan dengan terlebih dahulu mendefinisikan nilai-nilai elemen matriksnya pada himpunan fungsi eigen dan hamiltonian H , yaitu $\{\phi_n\}$. Karena dengan mengetahui nilai elemen matriks pada himpunan keadaan tersebut maka elemen pada himpunan keadaan lainnya dapat ditentukan dengan mudah.

Untuk mudahnya kita definisikan matriks kerapatan $\hat{\rho}$ di mana elemen-elemennya memenuhi

$$\rho_{mn} = \langle \phi_m | \hat{\rho} | \phi_n \rangle = \delta_{mn} |b_n|^2 \quad (4.9)$$

Ini artinya matriks $\hat{\rho}$ dalam himpunan $\{\phi_n\}$ adalah matriks diagonal, atau

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} |b_1|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |b_2|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |b_N|^2 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Jika kita memilih himpunan lengkap yang lain, misalnya $\{\chi_n\}$ maka kita selalu dapat memperoleh elemen matriks kerapatan dalam himpunan lengkap ini melalui transformasi yang dibahas berikut ini. Karena $\{\phi_n\}$ adalah himpunan yang lengkap maka kita selalu dapat menulis

$$|\chi_n\rangle = \sum_m a_{nm} |\phi_m\rangle \quad (4.10)$$

di mana $a_{nm} = \langle \phi_m | \chi_n \rangle$. Elemen matriks kerapatan dalam himpunan $\{\chi_n\}$ adalah

$$\begin{aligned} \rho'_{nm} &= \langle \chi_m | \hat{\rho} | \chi_n \rangle \\ &= \sum_p \sum_q a_{mp}^* a_{nq} \langle \phi_p | \hat{\rho} | \chi_q \rangle = \sum_p \sum_q a_{mp}^* a_{nq} \rho_{pq} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Tampak bahwa ρ'_{mn} dapat diperoleh dari ρ_{mn} melalui perkalian matriks sederhana. Cara lain mengungkapkan operator $\hat{\rho}$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= 1 \times \hat{\rho} \times 1 = \left(\sum_n |\phi_n\rangle \langle \phi_n| \right) \times \hat{\rho} \times \left(\sum_m |\phi_m\rangle \langle \phi_m| \right) \\ &= \sum_n \sum_m |\phi_n\rangle \langle \phi_n | \hat{\rho} | \phi_m\rangle \langle \phi_m | \\ &= \sum_n \sum_m |\phi_n\rangle \rho_{nm} \langle \phi_m | \end{aligned} \quad (4.12)$$

Dalam notasi matriks kerapatan, nilai rata-rata hasil pengukuran suatu observabel adalah

$$\begin{aligned} \langle \hat{O} \rangle &= \frac{\sum_n \sum_m \delta_{nm} |b_n|^2 \langle \phi_n | \hat{O} | \phi_m \rangle}{\sum_n |b_n|^2} = \frac{\sum_n \sum_m \rho_{nm} \langle \phi_n | \hat{O} | \phi_m \rangle}{\sum_n \rho_{nn}} \\ &= \frac{\sum_n \sum_m \langle \phi_m | \hat{\rho} | \phi_n \rangle \langle \phi_n | \hat{O} | \phi_m \rangle}{\sum_n \rho_{nn}} = \frac{\sum_m \langle \phi_m | \hat{\rho} \left(\sum_n |\phi_n\rangle \langle \phi_n| \right) \hat{O} | \phi_m \rangle}{\sum_n \rho_{nn}} \end{aligned}$$

Mengingat $\sum_n |\phi_n\rangle \langle \phi_n| = 1$ maka kita dapat menulis

$$\langle \hat{O} \rangle = \frac{\sum_m \langle \phi_m | \hat{\rho} \hat{O} | \phi_m \rangle}{\sum_n \rho_{nn}} = \frac{Tr(\hat{\rho} \hat{O})}{Tr(\hat{\rho})} \quad (4.13)$$

Di mana $\text{Tr}(\dots)$ menyatakan jumlah elemen diagonal suatu matriks, atau $\text{Tr}(A) = \sum_i A_{ii}$.

4.5 Ensemble Mikrokanonik

Dalam representasi $\{\phi_n\}$ yang merupakan himpunan lengkap fungsi eigen Hamiltonian, elemen matriks kerapatan assembly dalam ensemble mikrokanonik adalah

$$\rho_{nm} = \delta_{nm} |b_n|^2$$

di mana

$$|b_n|^2 = \begin{cases} 1, & E < E_n < E + \Delta \\ 0, & E_n < E \text{ atau } E_n > E + \Delta \end{cases} \quad (4.14)$$

Dengan demikian operator matriks kerapatan dapat ditulis

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \sum_n \sum_m |\phi_n\rangle \rho_{nm} \langle \phi_m| = \sum_n \sum_m |\phi_n\rangle \delta_{nm} |b_n|^2 \langle \phi_m| = \sum_n |\phi_n\rangle |b_n|^2 \langle \phi_n| \\ &= \sum_{E_n < E} |\phi_n\rangle |b_n|^2 \langle \phi_n| + \sum_{E < E_n < E + \Delta} |\phi_n\rangle |b_n|^2 \langle \phi_n| + \sum_{E_n > E + \Delta} |\phi_n\rangle |b_n|^2 \langle \phi_n| \\ &= \sum_{E_n < E} |\phi_n\rangle \times 0 \times \langle \phi_n| + \sum_{E < E_n < E + \Delta} |\phi_n\rangle \times 1 \times \langle \phi_n| + \sum_{E_n > E + \Delta} |\phi_n\rangle \times 0 \times \langle \phi_n| \\ &= \sum_{E < E_n < E + \Delta} |\phi_n\rangle \langle \phi_n| \end{aligned} \quad (4.15)$$

dan

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{\rho}) &= \sum_m \langle \phi_m | \hat{\rho} | \phi_m \rangle = \sum_m \left\langle \phi_m \left| \sum_{E < E_n < E + \Delta} |\phi_n\rangle \langle \phi_n| \right| \phi_m \right\rangle \\ &= \sum_m \sum_{E < E_n < E + \Delta} \langle \phi_m | \phi_n \rangle \langle \phi_n | \phi_m \rangle \\ &= \sum_m \sum_{E < E_n < E + \Delta} \delta_{nm} \delta_{nm} = \sum_m 1 = \Gamma(E) \end{aligned} \quad (4.16)$$

di mana $\Gamma(E)$ adalah jumlah keadaan yang berada dalam selang energi antara E sampai $E+\Delta$.

Kita mendefinisikan entropi mikrokanonik sebagai

$$S = k \ln \Gamma(E) \quad (4.17)$$

Jadi entropi dalam assemblé mikrokanonik sebanding dengan logaritma jumlah keadaan yang dimiliki assemblé tersebut.

4.6 Ensemble Kanonik dan Grand Kanonik

Elemen matriks kerapatan ensemble kanonik diturunkan dari probabilitas menemukan assemblé dalam ensemble kanonik, yaitu

$$\rho_{nm} = \delta_{nm} e^{-E_n/kT} \quad (4.18)$$

Dengan demikian operator matriks kerapatan

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \sum_n \sum_m |\phi_n\rangle \rho_{nm} \langle \phi_m| = \sum_n \sum_m |\phi_n\rangle \delta_{nm} e^{-E_n/kT} \langle \phi_m| \\ &= \sum_n |\phi_n\rangle e^{-E_n/kT} \langle \phi_n| = \sum_n e^{-E_n/kT} |\phi_n\rangle \langle \phi_n| \\ &= \sum_n e^{-E_n/kT} |\phi_n\rangle \langle \phi_n| = \sum_n e^{-\hat{H}/kT} |\phi_n\rangle \langle \phi_n| = e^{-\hat{H}/kT} \sum_n |\phi_n\rangle \langle \phi_n| \\ &= e^{-\hat{H}/kT} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Dengan demikian fungsi partisi kanonik dan nilai rata-rata pengukuran observable O memenuhi

$$Z_N = \text{Tr}(\hat{\rho}) = \text{Tr}(e^{-\hat{H}/kT}) \quad (4.20)$$

$$\langle \hat{O} \rangle_N = \frac{\text{Tr}(\hat{O} e^{-\hat{H}/kT})}{Z_N} \quad (4.21)$$

Fungsi partisi grand kanonik adalah

$$Z_G = \sum_N \sum_i e^{(\mu N - E_i)/kT}$$

$$= \text{Tr} \left(e^{-(\hat{H} - \mu \hat{N})/kT} \right) \quad (4.22)$$

dengan \hat{N} adalah operator jumlah partikel untuk assembli. Operator tersebut memenuhi persamaan

$$\hat{N} = \sum_s \hat{n}_s \quad (4.23)$$

di mana \hat{n}_s adalah operator jumlah partikel pada keadaan ke- s dan memenuhi $\hat{n}_s |\phi_s\rangle = n_s |\phi_s\rangle$. Selanjutnya kita dapat dengan mudah memperlihatkan hubungan berikut ini:

$$\hat{n}_s |\phi_q\rangle = n_s \delta_{qs} |\phi_q\rangle, \quad (4.24a)$$

$$\langle \phi_r | \hat{n}_s | \phi_q \rangle = n_s \delta_{qs} \delta_{sr}, \quad (4.24b)$$

$$\langle \phi_r | \hat{N} | \phi_q \rangle = \sum_s \langle \phi_r | \hat{n}_s | \phi_q \rangle = \sum_s n_s \delta_{qs} \delta_{sr} = n_q \delta_{qr}. \quad (4.24c)$$

Nilai rata-rata pengukuran observable O dapat diperoleh berdasarkan pemikiran sebagai berikut. Perhatikan persamaan (4.20) dan (4.21) untuk ensemble kanonik. Bagian dalam tanda $\text{Tr}(\dots)$ pada persamaan (4.21) tidak lain dari operator \hat{O} dikalikan dengan bagian dalam tanda $\text{Tr}(\dots)$ dalam persamaan (4.20). Bagian dalam tanda $\text{Tr}(\dots)$ pada persamaan (4.20) tidak lain daripada operator untuk mencari fungsi partisi kanonik Z_N . Dengan pola pemikiran yang sama, maka kita dapat menentukan nilai rata-rata observabel O dalam ensemble grand kanonik dengan menggunakan persamaan yang mirip dengan persamaan (4.21) dengan cara mengganti operator fungsi partisi kanonik pada persamaan (4.21) dengan operator fungsi partisi grand kanonik.

Berdasarkan persamaan (4.22), operator fungsi partisi grand kanonik diperoleh dengan mengganti Z_N di dalam penjumlahan dengan $e^{-\hat{H}/kT}$. Dengan demikian, nilai rata-rata observabel dalam ensemble grand kanonik menjadi

$$\langle \hat{O} \rangle = \frac{\text{Tr}(\hat{O} e^{-(\hat{H} - \mu\hat{N})/kT})}{Z_G} \quad (4.25)$$

4.7 Metode Operator

Perlu dipahami bahwa aljabar operator tidak persis sama dengan aljabar bilangan biasa karena banyak operator yang tidak bersifat komutatif. Secara umum operator \hat{A} dan \hat{B} memenuhi aturan berikut ini

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \neq 0. \quad (4.26)$$

Dengan aturan ini mana secara umum ketidaksamaan berikut berlaku:

$\exp(\hat{A} + \hat{B}) \neq \exp(\hat{A})\exp(\hat{B})$. Hanya jika \hat{A} dan \hat{B} bersifat *komutatif* baru terpenuhi $\exp(\hat{A} + \hat{B}) = \exp(\hat{A})\exp(\hat{B})$. Secara umum persamaan yang berlaku adalah

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} \cong e^{\hat{A} + \hat{B}} e^{[\hat{A}, \hat{B}]/2} \quad (4.27)$$

Mari kita tinjau sebuah kasus di mana suatu assemblé disusun oleh N sistem kuantum. Hamiltonian tiap sistem adalah $\hat{H} = -\hbar^2\nabla^2/2m + V(\vec{r})$. Persamaan Schrodinger untuk satu sistem adalah $\hat{H}\varphi_s = \varepsilon_s\varphi_s$ dengan φ_s adalah fungsi eigen dan ε_s adalah energi eigen. Karena di dalam assemblé terdapat N sistem maka bentuk paling sederhana dari fungsi gelombang assemblé memenuhi

$$\Psi_N = \prod_{s=1}^N \varphi_s \quad (4.28)$$

Fungsi grand partisi memenuhi persamaan

$$Z_G = \text{Tr} \left\{ \exp \left[-\frac{\hat{H} - \mu\hat{N}}{kT} \right] \right\} \quad (4.29)$$

Dengan menggunakan persamaan (4.27) maka kita dapat menguraikan persamaan (4.29) menjadi

$$\exp \left[-\frac{\hat{H}}{kT} \right] \exp \left[\frac{\mu\hat{N}}{kT} \right] = \exp \left[-\frac{\hat{H} - \mu\hat{N}}{kT} \right] \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[-\frac{\hat{H}}{kT}, \frac{\mu\hat{N}}{kT} \right] \right\}$$

Kerana operator \hat{H} dan \hat{N} bersifat komutatif maka komutator dalam eksponensial suku paling kanan sama dengan nol. Dengan demikian kita peroleh bentuk sederhana berikut ini

$$\exp\left[-\frac{\hat{H}}{kT}\right]\exp\left[\frac{\mu\hat{N}}{kT}\right]=\exp\left[-\frac{\hat{H}-\mu\hat{N}}{kT}\right]$$

Akhirnya fungsi grand partisi (4.29) dapat ditulis dalam bentuk lebih sederhana sebagai berikut

$$Z_G = Tr\left\{\exp\left[-\frac{\hat{H}}{kT}\right]\exp\left[\frac{\mu\hat{N}}{kT}\right]\right\} \quad (4.30)$$

Kita dapat menyatakan hamiltonian dan operator jumlah sistem di dalam assembli dengan operator jumlah sistem yang menempati tiap keadaan seperti ungkapan berikut ini

$$\hat{H} = \sum_s \hat{n}_s \varepsilon_s \quad (4.31)$$

$$\hat{N} = \sum_s \hat{n}_s \quad (4.32)$$

Substitusi persamaan (4.31) dan (4.32) ke dalam persamaan (4.30) maka diperoleh bentuk lain dari fungsi grand partisi

$$\begin{aligned} Z_G &= Tr\left\{\exp\left[-\sum_s \frac{\hat{n}_s \varepsilon_s}{kT}\right]\exp\left[\mu\sum_s \frac{\hat{n}_s}{kT}\right]\right\} \\ &= Tr\left\{\prod_s \exp\left[-\frac{\hat{n}_s(\varepsilon_s - \mu)}{kT}\right]\right\} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Mengingat sifat $Tr(\hat{A}\hat{B}) = Tr(\hat{A})Tr(\hat{B})$ maka fungsi grand partisis (4.33) dapat ditulis menjadi

$$Z_G = \prod_s Tr\left\{\exp\left[-\frac{\hat{n}_s(\varepsilon_s - \mu)}{kT}\right]\right\} = \prod_s Z_s \quad (4.34)$$

dengan

$$Z_s = \text{Tr} \left\{ \exp \left[-\frac{\hat{n}_s (\varepsilon_s - \mu)}{kT} \right] \right\} \quad (4.35)$$

Dari ungkapan pada persamaan (4.35), jelas bahwa operator $\exp[-\hat{n}_s (\varepsilon_s - \mu)/kT]$ berbentuk matriks diagonal yang dapat ditulis sebagai

$$\exp[-\hat{n}_s (\varepsilon_s - \mu)/kT] = \begin{pmatrix} e^{-n_1 (\varepsilon_1 - \mu)/kT} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-n_2 (\varepsilon_2 - \mu)/kT} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-n_3 (\varepsilon_3 - \mu)/kT} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Karena $\text{Tr}(\dots)$ adalah jumlah elemen diagonal maka menjadi jelaslah bahwa

$$\begin{aligned} Z_s &= e^{-n_1 (\varepsilon_1 - \mu)/kT} + e^{-n_2 (\varepsilon_2 - \mu)/kT} + e^{-n_3 (\varepsilon_3 - \mu)/kT} + \dots \\ &= \sum_{n_s} e^{-n_s (\varepsilon_s - \mu)/kT} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Untuk fermion, jumlah sistem yang boleh menempati satu keadaan hanya boleh 0 atau 1, atau $n_s = 0$ dan $n_s = 1$. Dengan demikian, penentuan Z_s untuk fermion hanya melibatkan dua suku penjumlahan sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} Z_s^f &= e^{-0 \times (\varepsilon_s - \mu)/kT} + e^{-1 \times (\varepsilon_s - \mu)/kT} \\ &= 1 + e^{-(\varepsilon_s - \mu)/kT} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Akhirnya fungsi grand partisi untuk fermion adalah

$$Z_G^f = \prod_s \left[1 + e^{-(\varepsilon_s - \mu)/kT} \right] \quad (4.38)$$

Untuk boson jumlah sistem yang boleh menempati satu keadaan hanya boleh berapa saja, atau dari 0 sampai tak bergingga. Dengan demikian, untuk boson

$$Z_s^b = \sum_{n_s=0}^{\infty} e^{-n_s(\epsilon_s - \mu)/kT} = \frac{1}{1 - e^{-(\epsilon_s - \mu)/kT}} \quad (4.39)$$

Akhirnya fungsi grand partisi untuk boson adalah

$$Z_G^b = \prod_s \left[\frac{1}{1 - e^{-(\epsilon_s - \mu)/kT}} \right] \quad (4.40)$$

Sekarang kita menghitung jumlah rata-rata sistem pada keadaan ke-s. Dengan menggunakan persamaan (4.25) maka kita dapat menulis

$$\begin{aligned} \langle n_s \rangle &= \frac{\text{Tr} \left\{ \hat{n}_s e^{-(\hat{H} - \mu \hat{N})/kT} \right\}}{Z_G} \\ &= \frac{\text{Tr} \left\{ \hat{n}_s e^{-\sum_{s'} \hat{n}_{s'}(\epsilon_{s'} - \mu)/kT} \right\}}{Z_G} = \frac{\text{Tr} \left\{ -kT \frac{\partial}{\partial \epsilon_s} e^{-\sum_{s'} \hat{n}_{s'}(\epsilon_{s'} - \mu)/kT} \right\}}{Z_G} \\ &= -kT \frac{\frac{\partial}{\partial \epsilon_s} \text{Tr} \left\{ e^{-\sum_{s'} \hat{n}_{s'}(\epsilon_{s'} - \mu)/kT} \right\}}{Z_G} = -kT \frac{\frac{\partial}{\partial \epsilon_s} Z_G}{Z_G} \\ &= -kT \frac{\partial}{\partial \epsilon_s} \ln Z_G \end{aligned} \quad (4.41)$$

Jumlah rata-rata sistem fermion pada keadaan ke-s adalah

$$\begin{aligned} \langle n_s^f \rangle &= -kT \frac{\partial}{\partial \epsilon_s} \ln Z_G^f = -kT \frac{\partial}{\partial \epsilon_s} \ln \prod_{s'} [1 + e^{-(\epsilon_{s'} - \mu)/kT}] \\ &= -kT \frac{\partial}{\partial \epsilon_s} \sum_{s'} \ln [1 + e^{-(\epsilon_{s'} - \mu)/kT}] \\ &= -kT \sum_{s'} \frac{1}{1 + e^{-(\epsilon_{s'} - \mu)/kT}} \times \left(-\frac{1}{kT} \right) \times e^{-(\epsilon_{s'} - \mu)/kT} \times \delta_{s,s'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{-(\varepsilon_{s'} - \mu)/kT}}{1 + e^{-(\varepsilon_{s'} - \mu)/kT}} \\
&= \frac{1}{e^{(\varepsilon_{s'} - \mu)/kT} + 1}
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Jumlah rata-rata sistem boson pada keadaan ke- s adalah

$$\begin{aligned}
\langle n_s^b \rangle &= -kT \frac{\partial}{\partial \varepsilon_s} \ln Z_G^f = -kT \frac{\partial}{\partial \varepsilon_s} \ln \prod_{s'} \left[\frac{1}{1 - e^{-(\varepsilon_{s'} - \mu)/kT}} \right] \\
&= kT \frac{\partial}{\partial \varepsilon_s} \sum_{s'} \ln [1 - e^{-(\varepsilon_{s'} - \mu)/kT}] \\
&= kT \sum_{s'} \frac{1}{1 - e^{-(\varepsilon_{s'} - \mu)/kT}} \times \left(\frac{1}{kT} \right) \times e^{-(\varepsilon_{s'} - \mu)/kT} \times \delta_{s,s'} \\
&= \frac{e^{-(\varepsilon_s - \mu)/kT}}{1 - e^{-(\varepsilon_s - \mu)/kT}} \\
&= \frac{1}{e^{(\varepsilon_s - \mu)/kT} - 1}
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Selanjutnya kita diskusikan contoh lain yang sedikit lebih rumit. Perlu sedikit kemampuan matematika untuk memahaminya. Misalkan kita memiliki gas yang terdiri dari dua jenis partikel. Kedua partikel tersebut saling berinteraksi dengan energi potensial V_0 yang dianggap konstan. Kita ingin menentukan fungsi grand partisi untuk assembi tersebut.

Kita mulai dengan menentukan hamiltonian sistem yang terdiri dari dua jenis partikel yang berinteraksi. Hamiltonian dapat ditulis dalam bentuk operator kreasi dan anihilasi berikut ini

$$\hat{H} = \sum_p \left(\varepsilon_p^a \hat{a}_p^+ \hat{a}_p + \varepsilon_p^b \hat{b}_p^+ \hat{b}_p \right) + \sum_p V_0 \left(\hat{a}_p^+ \hat{b}_p + \hat{b}_p^+ \hat{a}_p \right) \tag{4.44}$$

Suku pertama adalah suku energi partikel terisolasi dan suku kedua adalah suku energi interaksi. Operator \hat{a}_p^+ , \hat{a}_p , \hat{b}_p^+ , dan \hat{b}_p adalah operator kreasi dan anihilasi untuk partikel a dan b. Fungsi grand partisi assembli tersebut adalah

$$Z_G = Tr \left\{ \exp \left[-\beta (\hat{H} - \mu \hat{N}) \right] \right\}$$

dengan

$$\hat{N} = \sum_p (\hat{a}_p^+ \hat{a}_p + \hat{b}_p^+ \hat{b}_p) \quad (4.45)$$

Dengan adanya suku interaksi maka operator eksponensial menjadi tidak diagonal. Untuk mencari $Tr(\dots)$ maka kita perlu mendiagonalkan terlebih dulu operator. Untuk maksud tersebut kita perlu melakukan sejenis transformasi. Transformasi untuk menghasilkan operator diagonal kita lakukan dengan memperkenalkan operator quasi partikel \hat{A}_p dan \hat{B}_p yang memenuhi hubungan berikut ini

$$\hat{A}_p = \hat{a}_p \cos \theta + \hat{b}_p \sin \theta \quad (4.46)$$

$$\hat{B}_p = -\hat{a}_p \sin \theta + \hat{b}_p \cos \theta \quad (4.47)$$

Transformasi semacam ini sering disebut transformasi Bogoliobov. Transformasi (4.46) dan (4.47) adalah transformasi ortogonal. Inversi dari transformasi tersebut adalah

$$\hat{a}_p = \hat{A}_p \cos \theta - \hat{B}_p \sin \theta \quad (4.48)$$

$$\hat{b}_p = \hat{a}_p \sin \theta + \hat{B}_p \cos \theta \quad (4.49)$$

Operator kreasi yang berkaitan adalah

$$\hat{a}_p^+ = \hat{A}_p^+ \cos \theta - \hat{B}_p^+ \sin \theta \quad (4.50)$$

$$\hat{b}_p^+ = \hat{a}_p^+ \sin \theta + \hat{B}_p^+ \cos \theta \quad (4.51)$$

Dari bentuk operator (4.46)-(4.51) kita dapatkan perkalian berikut ini

$$\hat{a}_p^+ \hat{a}_p = \hat{A}_p^+ \hat{A}_p \cos^2 \theta - \hat{A}_p^+ \hat{B}_p \cos \theta \sin \theta - \hat{B}_p^+ \hat{A}_p \cos \theta \sin \theta + \hat{B}_p^+ \hat{B}_p \sin^2 \theta$$

$$\hat{b}_p^+ \hat{b}_p = \hat{A}_p^+ \hat{A}_p \sin^2 \theta + \hat{A}_p^+ \hat{B}_p \cos \theta \sin \theta + \hat{B}_p^+ \hat{A}_p \cos \theta \sin \theta + \hat{B}_p^+ \hat{B}_p \cos^2 \theta$$

$$\hat{a}_p^+ \hat{b}_p = \hat{A}_p^+ \hat{A}_p \cos \theta \sin \theta + \hat{A}_p^+ \hat{B}_p \cos^2 \theta - \hat{B}_p^+ \hat{A}_p \sin^2 \theta - \hat{B}_p^+ \hat{B}_p \cos \theta \sin \theta$$

$$\hat{b}_p^+ \hat{a}_p = \hat{A}_p^+ \hat{A}_p \cos \theta \sin \theta + \hat{A}_p^+ \hat{B}_p \sin^2 \theta + \hat{B}_p^+ \hat{A}_p \cos^2 \theta - \hat{B}_p^+ \hat{B}_p \cos \theta \sin \theta$$

Dengan demikian suhu dalam hamiltonian (4.44) menjadi

$$\begin{aligned} & \varepsilon_p^a \hat{a}_p^+ \hat{a}_p + \varepsilon_p^b \hat{b}_p^+ \hat{b}_p + V_0 (\hat{a}_p^+ \hat{b}_p + \hat{b}_p^+ \hat{a}_p) \\ &= \hat{A}_p^+ \hat{A}_p (\varepsilon_p^a \cos^2 \theta + \varepsilon_p^b \sin^2 \theta + 2V_0 \cos \theta \sin \theta) + \hat{B}_p^+ \hat{B}_p (\varepsilon_p^b \cos^2 \theta + \varepsilon_p^a \sin^2 \theta) \\ & \quad + \hat{A}_p^+ \hat{B}_p (-\varepsilon_p^a \cos \theta \sin \theta + \varepsilon_p^b \cos \theta \sin \theta + V_0 [\cos^2 \theta - \sin^2 \theta]) \\ & \quad + \hat{B}_p^+ \hat{A}_p (-\varepsilon_p^a \cos \theta \sin \theta + \varepsilon_p^b \cos \theta \sin \theta + V_0 [\cos^2 \theta - \sin^2 \theta]) \\ & \hat{a}_p^+ \hat{a}_p + \hat{b}_p^+ \hat{b}_p = \hat{A}_p^+ \hat{A}_p + \hat{B}_p^+ \hat{B}_p \end{aligned}$$

Jelaslah bahwa operator eksponensial dalam fungsi grand partisi menjadi diagonal jika koefisien dari $\hat{A}_p^+ \hat{B}_p$ dan $\hat{B}_p^+ \hat{A}_p$ pada persamaan di atas adalah nol. Dengan demikian syarat diagonal adalah

$$-\varepsilon_p^a \cos \theta \sin \theta + \varepsilon_p^b \cos \theta \sin \theta + V_0 [\cos^2 \theta - \sin^2 \theta] = 0$$

atau

$$-(\varepsilon_p^a - \varepsilon_p^b) \times \frac{1}{2} \sin 2\theta + V_0 \cos 2\theta = 0$$

Yang memberikan bentuk untuk sudut θ sebagai berikut

$$\tan 2\theta = \frac{2V_0}{\varepsilon_p^a - \varepsilon_p^b} \quad (4.52)$$

Jika kita mendefinisikan parameter berikut ini

$$\lambda_p^a = \varepsilon_p^a \cos^2 \theta + \varepsilon_p^b \sin^2 \theta + 2V_0 \cos \theta \sin \theta \quad (4.53)$$

dan

$$\lambda_p^b = \varepsilon_p^b \cos^2 \theta + \varepsilon_p^a \sin^2 \theta \quad (4.54)$$

maka kita dapat menulis hamiltonian menjadi

$$\begin{aligned} \hat{H} - \mu \hat{N} &= \sum_p \lambda_p^a \hat{A}_p^+ \hat{A}_p + \lambda_p^b \hat{B}_p^+ \hat{B}_p - \mu (\hat{A}_p^+ \hat{A}_p + \hat{B}_p^+ \hat{B}_p) \\ &= \sum_p (\lambda_p^a - \mu) \hat{A}_p^+ \hat{A}_p + (\lambda_p^b - \mu) \hat{B}_p^+ \hat{B}_p \end{aligned} \quad (4.55)$$

Karena hubungan komutatif berikut berlaku, $[\hat{A}_p^+ \hat{A}_p, \hat{B}_p^+ \hat{B}_p] = 0$ maka

$$\begin{aligned} &\exp \left[\sum_p (\lambda_p^a - \mu) \hat{A}_p^+ \hat{A}_p + (\lambda_p^b - \mu) \hat{B}_p^+ \hat{B}_p \right] \\ &= \exp \left[\sum_p (\lambda_p^a - \mu) \hat{A}_p^+ \hat{A}_p \right] \exp \left[\sum_p (\lambda_p^b - \mu) \hat{B}_p^+ \hat{B}_p \right] \end{aligned}$$

Dengan demikian fungsi grand partisi menjadi

$$\begin{aligned} &Tr \left\{ \exp \left[\sum_p (\lambda_p^a - \mu) \hat{A}_p^+ \hat{A}_p \right] \exp \left[\sum_p (\lambda_p^b - \mu) \hat{B}_p^+ \hat{B}_p \right] \right\} \\ &= Tr \left\{ \exp \left[\sum_p (\lambda_p^a - \mu) \hat{A}_p^+ \hat{A}_p \right] \right\} \times Tr \left\{ \exp \left[\sum_p (\lambda_p^b - \mu) \hat{B}_p^+ \hat{B}_p \right] \right\} \\ &= Z_G^a Z_G^b \end{aligned} \quad (4.56)$$

di mana Z_G^a dan Z_G^b didefinisikan sebagai

$$Z_G^a = Tr \left\{ \exp \left[\sum_p (\lambda_p^a - \mu) \hat{A}_p^+ \hat{A}_p \right] \right\} = \prod_s \sum_{n_p^a} e^{-n_p^a (\lambda_p^a - \mu) / kT} \quad (4.57)$$

$$Z_G^b = Tr \left\{ \exp \left[\sum_p (\lambda_p^b - \mu) \hat{B}_p^+ \hat{B}_p \right] \right\} = \prod_s \sum_{n_p^b} e^{-n_p^b (\lambda_p^b - \mu) / kT} \quad (4.58)$$

4.8 Formulasi Alternatif

Sekarang kita coba membahas penurunan fungsi grand partisi boson dan fermion dengan metode lain. Fungsi grand partisi boson dan fermion yang telah kita turunkan sebelumnya dapat dinyatakan dalam bentuk umum

$$Z_G = \prod_j (1 + \alpha z e^{\beta \epsilon_j})^\alpha \quad (4.59)$$

dengan $\beta = -1/kT$, $z = e^{-\beta\mu}$, $\alpha = +1$ untuk fermion dan $\alpha = -1$ untuk boson. Jika kita ambil logaritma dua ruas persamaan (4.59) maka kita dapatkan,

$$\ln Z_G = \alpha \sum_j \ln(1 + \alpha z e^{\beta \epsilon_j}) \quad (4.60)$$

Kita ingat kembali definisi berikut ini yang dipelajari di kuliah Kalkulus,

$$\ln(1+x) = \int \frac{dx}{1+x}$$

Selanjutnya kita uraikan $1/(1+x)$ dalam deret Taylor sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^{n+1} x^{n-1} + \dots \\ &= \sum_{n=1} (-1)^{n+1} x^{n-1} \end{aligned}$$

Dengan demikian kita dapat menulis

$$\ln(1+x) = \int \frac{dx}{1+x} = \sum_{n=1} (-1)^{n+1} \int x^{n-1} dx = \sum_{n=1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

Jika kita substitusi $x = \alpha z e^{\beta \epsilon_j}$ maka diperoleh

$$\ln(1 + \alpha z e^{\beta \epsilon_j}) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(\alpha z e^{\beta \epsilon_j})^n}{n}$$

Dengan menggunakan ungkapan di atas maka fungsi grand partisi pada persamaan (4.60) dapat ditulis dalam bentuk berikut ini

$$\begin{aligned} \ln Z_G &= \alpha \sum_j \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(\alpha z e^{\beta \epsilon_j})^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \alpha^{n+1} \frac{z^n}{n} \sum_j e^{n\beta \epsilon_j} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \alpha^{n+1} \frac{z^n}{n} q(n\beta) \end{aligned} \quad (4.61)$$

di mana

$$q(n\beta) = \sum_j e^{n\beta \epsilon_j} \quad (4.62)$$

Pada bagian awal kita sudah turunkan persamaan yang menghubungkan perkalian tekanan dan volum dengan fungsi grand partisi sebagai $-\beta PV = \ln Z_G$. Dengan demikian bentuk perkalian tekanan dan volum memenuhi

$$-\beta PV = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \alpha^{n+1} \frac{z^n}{n} q(n\beta) \quad (4.63)$$

Jumlah rata-rata partikel dalam assembli memenuhi

$$\begin{aligned} \bar{N} &= z \frac{\partial}{\partial z} \ln Z_G = z \frac{\partial}{\partial z} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \alpha^{n+1} \frac{z^n}{n} q(n\beta) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \alpha^{n+1} z^n q(n\beta) \end{aligned} \quad (4.64)$$

Energi rata-rata assembli dapat ditulis dalam bentuk

$$\bar{E} = \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_G = \frac{\partial}{\partial \beta} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \alpha^{n+1} \frac{z^n}{n} q(n\beta)$$

$$= \sum_{n=1} (-1)^{n+1} \alpha^{n+1} \frac{z^n}{n} \frac{\partial q(n\beta)}{\partial \beta} \quad (4.65)$$

Dari persamaan jumlah rata-rata sistem dalam assembli kita dapat menentukan jumlah rata-rata sistem dalam tiap tingkat energi sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \sum_{n=1} (-1)^{n+1} \alpha^{n+1} z^n q(n\beta) = \sum_{n=1} (-1)^{n+1} \alpha^{n+1} z^n \sum_j e^{n\beta \epsilon_j} \\ &= \alpha \sum_j \sum_{n=1} (-1)^{n+1} (\alpha z e^{\beta \epsilon_j})^n = \alpha \sum_j \frac{\alpha z e^{\beta \epsilon_j}}{1 + \alpha z e^{\beta \epsilon_j}} = \sum_j \frac{\alpha^2 z e^{\beta \epsilon_j}}{1 + \alpha z e^{\beta \epsilon_j}} \\ &= \sum_j \frac{z e^{\beta \epsilon_j}}{1 + \alpha z e^{\beta \epsilon_j}} \end{aligned} \quad (4.66)$$

Persamaan (4.66) dapat ditulis sebagai $\bar{N} = \sum_j \bar{n}_j$ sehingga jumlah rata-rata partikel pada tingkat energi ke-j memenuhi

$$\bar{n}_j = \frac{z e^{\beta \epsilon_j}}{1 + \alpha z e^{\beta \epsilon_j}} \quad (4.67)$$

Dari persamaan (4.67) kita dapat ungkapkan jumlah rata-rata sistem pada assembli boson dan fermion. Untuk boson ($\alpha = -1$) persamaan (4.67) menjadi

$$\bar{n}_j = \frac{e^{-\beta \mu} e^{\beta \epsilon_j}}{1 - e^{-\beta \mu} e^{\beta \epsilon_j}} = \frac{1}{e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)} - 1} \quad (4.68)$$

Untuk fermion ($\alpha = +1$) maka persamaan (4.68) menjadi

$$\bar{n}_j = \frac{e^{-\beta \mu} e^{\beta \epsilon_j}}{1 + e^{-\beta \mu} e^{\beta \epsilon_j}} = \frac{1}{e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)} + 1} \quad (4.69)$$

4.9 Kondensasi Boson dan Non Kondensasi Fermion

Sekarang kita menyelidiki satu sifat yang menarik untuk boson dan fermion. Kita pisahkan partikel yang berada di keadaan dasar dan keadaan di atasnya (kita sebut keadaan terkesitasi). Untuk maksud tersebut kita lakukan penguraian sebagai berikut

$$q(\beta) = g_0 + q_e(\beta) \quad (4.70)$$

di mana g_0 adalah kontribusi keadaan dasar dan q_e adalah kontribusi keadaan lainnya (keadaan terkesitasi). Dengan definisi ini maka kita dapat menulis jumlah rata-rata sistem dalam assembli sebagai berikut

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \sum_{n=1} (-1)^{n+1} \alpha^{n+1} z^n [g_0 + q_e(n\beta)] \\ &= \alpha g_0 \sum_{n=1} (-1)^{n+1} (\alpha z)^n + \sum_{n=1} (-1)^{n+1} \alpha^{n+1} z^n q_e(n\beta) \\ &= \alpha g_0 \frac{\alpha z}{1 + \alpha z} + \sum_{n=1} (-1)^{n+1} \alpha^{n+1} z^n q_e(n\beta) \\ &= \frac{g_0 z}{1 + \alpha z} + \sum_{n=1} (-1)^{n+1} \alpha^{n+1} z^n q_e(n\beta) \end{aligned} \quad (4.71)$$

Sekarang kita tentukan bentuk untuk boson dan fermion. Untuk boson ($\alpha = -1$) persamaan (4.71) menghasilkan

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \frac{g_0 z}{1 - z} + \sum_{n=1} (-1)^{n+1} (-1)^{n+1} z^n q_e(n\beta) \\ &= \frac{g_0 z}{1 - z} + \sum_{n=1} z^n q_e(n\beta) \end{aligned} \quad (4.72)$$

Dari persamaan (4.72) kita dapatkan jumlah sistem yang berada pada keadaan dasar adalah

$$N_0^b = \frac{g_0 z}{1 - z} \quad (4.73)$$

Tampak dari persamaan (4.73) bahwa jika $z \rightarrow 1$ maka $N_0 \rightarrow \infty$. Ini berarti banyak sekali partikel yang berada pada keadaan dasar. Kondisi ini disebut kondensasi Bose–Einstein.

Untuk fermion ($\alpha = +1$) persamaan (4.71) menghasilkan

$$\begin{aligned}\bar{N} &= \frac{g_0 z}{1+z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (1)^{n+1} z^n q_e(n\beta) \\ &= \frac{g_0 z}{1+z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} z^n q_e(n\beta)\end{aligned}\quad (4.74)$$

Dengan demikian jumlah sistem yang berada pada keadaan dasar untuk assembli fermion adalah

$$N_0^f = \frac{g_0 z}{1+z} \quad (4.75)$$

Karena $z < 1+z$ maka $N_0 < g_0$. Namun, g_0 itu sendiri adalah degenerasi keadaan dasar. Jadi jumlah fermion di keadaan dasar selalu lebih kecil daripada degenerasi keadaan dasar tersebut. Jumlah fermion di keadaan dasar selalu terbatas. Ini adalah implikasi dari prinsip eksklusi Pauli. Oleh karena itulah fermion tidak pernah menunjukkan gejala kondensasi atau kita tidak pernah mendapatkan kondensasi Fermi-Dirac.

4.10 Tekanan Gas Kuantum Ideal

Sekarang kita akan menentukan tekanan yang dihasilkan oleh gas boson dan gas fermion. Untuk assembli boson dalam ensemble grand kanonik kita memiliki persamaan

$$\begin{aligned}\frac{PV}{kT} &= \sum_j \ln \left(1 - e^{\beta(\epsilon_j - \mu)/kT} \right) = \sum_j \ln \left(1 + \frac{1}{e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)/kT} - 1} \right) = \\ &= \sum_j \ln(1 + b_j)\end{aligned}\quad (4.76)$$

di mana kita memperkenalkan bentuk alternatif

$$b_j = \left(e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)/kT} - 1 \right)^{-1} \quad (4.77)$$

Tekanan pada persamaan (4.76) merupakan tekanan yang dihasilkan boson atau fermion dan kita definisikan sebagai tekanan gas kuantum. Jumlah rata-rata sistem dalam assembli adalah

$$\bar{N} = \sum_j \frac{1}{e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)/kT} - 1} = \sum_j b_j \quad (4.78)$$

Kita dapatkan selisih antara tekanan gas kuantum (tekanan yang memenuhi persamaan (4.76)) dengan tekanan gas ideal (NkT/V) sebagai berikut

$$P - \bar{N} \frac{kT}{V} = \frac{kT}{V} \sum_j [\ln(1 + b_j) - b_j] \quad (4.79)$$

Kita akan mengecek tanda yang dimiliki persamaan selisih (4.79): apakah positif atau negatif. Tanda jenis tanda menyimpulkan apakah tekanan gas kuantum lebih besar atau lebih kecil daripada tekanan gas ideal. Untuk maksud tersebut mari kita perhatikan fungsi berikut ini

$$f(x) = \ln(1 + x) - x$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{1+x} - 1 = -\left(1 - \frac{1}{1+x}\right)$$

Karena $x > 0$ maka $df/dx < 0$ untuk semua $x > 0$. Pada nilai x yang memenuhi $x \rightarrow 0$ kita dapat uraikan $f(x)$ dalam deret Taylor dan diperoleh sebagai berikut

$$f(x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots\right) - x = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

Dengan demikian

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\lim_{x \rightarrow 0} x} = \frac{-x^2/2}{\lim_{x \rightarrow 0} x} < 0$$

Dari sini kita simpulkan bahwa $f(0) < 0$ dan fungsi $f(x)$ bersifat monoton turun. Jadi $f(x)$ selalu negatif untuk semua $x > 0$. Ini berimplikasi bahwa $P - \bar{N}kT/V < 0$ atau $P < \bar{N}kT/V$. Untuk gas ideal klasik $P = \bar{N}kT/V$. Dengan demikian, *tekanan gas boson ideal lebih kecil daripada tekanan gas ideal klasik*. Ini disebabkan oleh adanya tarikan antar partikel boson. Tarikan inilah yang menyebabkan terjadinya kondensasi Bose-Einstein.

Untuk assembli fermion dalam ensemble grand kanonik kita mendapatkan hubungan

$$\begin{aligned} \frac{PV}{kT} &= -\sum_j \ln\left(1 + e^{\beta(\varepsilon_j - \mu)/kT}\right) = -\sum_j \ln\left(1 - \frac{1}{e^{-\beta(\varepsilon_j - \mu)/kT} + 1}\right) \\ &= -\sum_j \ln(1 - f_j) \end{aligned} \quad (4.80)$$

di mana

$$f_j = \left(e^{-\beta(\varepsilon_j - \mu)/kT} + 1\right)^{-1} \quad (4.81)$$

Jumlah rata-rata partikel dalam assemblé adalah

$$\bar{N} = \sum_j \frac{1}{e^{-\beta(\varepsilon_j - \mu)/kT} + 1} = \sum_j f_j \quad (4.82)$$

Dengan demikian kita dapatkan selisih antara P dengan NkT/V sebagai

$$P - \bar{N} \frac{kT}{V} = -\frac{kT}{V} \sum_j [\ln(1 - f_j) + f_j] \quad (4.83)$$

Di sini juga kita akan mengecek apakah tanda yang dimiliki persamaan selisih (4.83). Untuk maksud tersebut mari kita perhatikan fungsi berikut ini

$$f(x) = \ln(1 - x) + x$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{-1}{1-x} + 1 = 1 - \frac{1}{1-x}$$

Mengingat $x = \frac{1}{e^{-\beta(\varepsilon_j - \mu)/kT} + 1}$ maka $0 < x < 1$. Dengan demikian $1/(1-x) > 1$. Oleh

karena itu $df/dx = 1 - 1/(1-x) < 0$. Jadi, fungsi $f(x)$ bersifat monoton turun.

Pada kondisi di mana x memenuhi $x \rightarrow 0$ kita dapat uraikan $f(x)$ dalam deret Taylor dan diperoleh sebagai berikut

$$f(x) = \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots\right) + x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots$$

Jelas di sini bahwa untuk $x \rightarrow 0$, $f(x) < 0$. Karena $f(x)$ monoton turun maka $f(x)$ negatif untuk semua $0 < x < 1$. Dengan demikian, untuk fermion $P - \bar{N}kT/V > 0$.

Ini artinya *tekanan gas fermion ideal lebih besar daripada tekanan gas ideal klasik*. Ini hanya mungkin disebabkan oleh adanya tolakan antar partikel fermion akibat prinsip eksklusi Pauli.

4.11 Persamaan Gerak Matriks Kerapatan

Pada bagian berikut ini kita akan menganalisis persamaan gerak untuk matriks kerapatan. Kembali ke bentuk matriks kerapatan

$$\hat{\rho} = \sum_{nm} |\phi_n\rangle \rho_{nm} \langle \phi_m| \quad (4.84)$$

Jika waktu berubah maka keadaan yang diijinkan bagi sistem juga berubah. Secara umum kita dapat menulis kebergantungan matriks kerapatan pada waktu sebagai berikut

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{nm} |\phi_n(t)\rangle \rho_{nm} \langle \phi_m(t)| \quad (4.85)$$

Untuk mencari persamaan gerak bagi matriks kerapatan sehingga kebergantungan matriks kerapatan pada waktu dapat ditentukan, mari kita tinjau cara berikut ini. Misalkan $\{|E_n\rangle\}$ adalah kumpulan fungsi eigen dari Hamiltonian \hat{H} dan $\{E_n\}$ adalah nilai-nilai eigen yang bersesuaian maka

$$\hat{H}|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle \quad (4.86)$$

Keadaan sembarang $|\phi_n(0)\rangle$ pada saat $t=0$ selalu dapat diuraikan atas fungsi eigen $\{|E_n\rangle\}$ sebagai berikut

$$|\phi_n(0)\rangle = \sum_{n'} C_{n'} |E_{n'}\rangle \quad (4.87)$$

dengan $C_{n'} = \langle E_{n'} | \phi_n \rangle$. Dengan menggunakan koefisien tersebut maka persamaan (4.87) dapat ditulis

$$|\phi_n(0)\rangle = \sum_{n'} |E_{n'}\rangle \langle E_{n'} | \phi_n(0)\rangle \quad (4.88)$$

Setelah kita mengetahui keadaan-keadaan $|\phi_n\rangle$ pada saat $t=0$ maka kita dapat menentukan keadaan-keadaan $|\phi_n\rangle$ pada saat sembarang melalui transformasi berikut

$$\begin{aligned}
 |\phi_n(t)\rangle &= \sum_{n'} |E_{n'}\rangle e^{-iE_{n'}t/\hbar} \langle E_{n'} | \phi_n(0) \rangle \\
 &= \sum_{n'} e^{-iE_{n'}t/\hbar} |E_{n'}\rangle \langle E_{n'} | \phi_n(0) \rangle \\
 &= \sum_{n'} e^{-i\hat{H}t/\hbar} |E_{n'}\rangle \langle E_{n'} | \phi_n(0) \rangle \\
 &= e^{-i\hat{H}t/\hbar} \sum_{n'} |E_{n'}\rangle \langle E_{n'} | \phi_n(0) \rangle \\
 &= e^{-i\hat{H}t/\hbar} |\phi_n(0)\rangle
 \end{aligned} \tag{4.89}$$

Dengan demikian, matriks kerapatan pada saat t menjadi

$$\begin{aligned}
 \hat{\rho}(t) &= \sum_{nm} e^{-i\hat{H}t/\hbar} |\phi_n(0)\rangle \rho_{nm} \langle \phi_m(0) | e^{i\hat{H}t/\hbar} \\
 &= e^{-i\hat{H}t/\hbar} \left(\sum_{nm} |\phi_n(0)\rangle \rho_{nm} \langle \phi_m(0) | \right) e^{i\hat{H}t/\hbar} \\
 &= e^{-i\hat{H}t/\hbar} \hat{\rho}(0) e^{i\hat{H}t/\hbar}
 \end{aligned} \tag{4.90}$$

Pada penurunan persamaan (4.90) kita sudah menggunakan sifat hermitian dari operator Hamiltonian, yaitu $\hat{H}^+ = \hat{H}$. Lakukan diferensial persamaan (4.90) terhadap waktu sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} &= -\frac{i\hat{H}}{\hbar} e^{-i\hat{H}t/\hbar} \hat{\rho}(0) e^{i\hat{H}t/\hbar} + e^{-i\hat{H}t/\hbar} \hat{\rho}(0) e^{i\hat{H}t/\hbar} \frac{i\hat{H}}{\hbar} \\
 &= -\frac{i\hat{H}}{\hbar} \hat{\rho} + \hat{\rho} \frac{i\hat{H}}{\hbar}
 \end{aligned}$$

$$= -\frac{i}{\hbar} (\hat{H}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{H}) \quad (4.91)$$

Dari persamaan (4.90) kita juga mendapatkan

$$\begin{aligned} Tr(\hat{\rho}(t)) &= Tr(e^{-i\hat{H}t/\hbar} \hat{\rho}(0) e^{i\hat{H}t/\hbar}) = Tr(e^{-i\hat{H}t/\hbar} e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{\rho}(0)) \\ &= Tr(\hat{\rho}(0)) \end{aligned} \quad (4.92)$$

Untuk assembli kanonik ungkapan untuk matriks kerapatan dapat $\hat{\rho} = e^{-\hat{H}/kT} = e^{\beta\hat{H}}$. Dengan demikian

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \beta} = \hat{H} e^{\beta\hat{H}} = \hat{H} \hat{\rho} \quad (4.93)$$

Dalam representasi posisi maka persamaan (4.93) mengambil bentuk

$$\begin{aligned} \langle x | \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \beta} | x' \rangle &= \langle x | \hat{H} \hat{\rho} | x' \rangle = \langle x | \hat{H} \left(\int |x''\rangle \langle x''| dx'' \right) \hat{\rho} | x' \rangle \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \langle x | \hat{\rho} | x' \rangle &= \int \langle x | \hat{H} | x'' \rangle \langle x'' | \hat{\rho} | x' \rangle dx'' \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \rho(x, x'; \beta) &= \int \hat{H} \delta(x - x'') \rho(x'', x'; \beta) dx'' \\ &= \hat{H}_x \rho(x, x'; \beta) \end{aligned} \quad (4.94)$$

di mana operator H_x hanya bekerja pada variable x , bukan variable x' . Persamaan (4.94) adalah persamaan dasar untuk menentukan kebergantungan matriks kerapatan terhadap suhu. Pada perumusan ini suhu seolah-olah berperan seperti variabel waktu pada perumusan mekanika kuantum. Berikut ini kita akan menurunkan matriks kerapatan untuk beberapa kasus sederhana.

4.12 Persamaan Kerapatan Sistem Bebas

Pertama kita bahas partikel bebas yang bergerak dalam ruang satu dimensi x (tidak mendapat gaya apa pun). Hamiltonian adalah

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (4.95)$$

Dengan menggunakan Hamiltonian (4.95) maka persamaan matriks kerapatan (4.94) menjadi

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \rho(xx'; \beta) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(xx'; \beta) \quad (4.96)$$

Untuk menyelesaikan persamaan diferensial (4.96), kita kenalkan variabel baru berikut ini

$$\eta = \frac{x - x'}{\sqrt{-2\hbar^2 \beta / m}} \quad (4.97)$$

Elemen matriks kerapatan menjadi fungsi dua variabel, η dan x' , atau $\rho(\eta, x')$. Dengan permisalan tersebut maka

$$\frac{\partial \rho}{\partial \beta} = \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \beta} = -\frac{1}{2} \frac{\eta}{\beta} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \quad (4.98a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \frac{1}{\sqrt{-2\hbar^2 \beta / m}} \quad (4.98b)$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{-2\hbar^2 \beta / m}} = -\frac{1}{2\hbar^2 \beta / m} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \eta^2} \quad (4.98c)$$

Substitusi persamaan (4.98a) – (4.98c) ke dalam persamaan (4.96) maka diperoleh

$$-\frac{1}{2} \frac{\eta}{\beta} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(-\frac{1}{2\hbar^2 \beta / m} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \eta^2} \right)$$

atau

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial \eta^2} + 2\eta \frac{\partial \rho}{\partial \eta} = 0 \quad (4.99)$$

Untuk mencari solusi persamaan (4.99) kita mulai dengan permisalan berikut ini,

$$\varphi = \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \quad (4.100)$$

Dengan permisalan ini maka persamaan (4.99) dapat ditulis menjadi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + 2\eta\varphi = 0 \quad (4.101)$$

Solusi persamaan (4.101) sangat standar, yaitu

$$\varphi(\eta) = C_1 \exp(-\eta^2) \quad (4.102)$$

Dari persamaan (4.100) dan (4.102) kita peroleh persamaan diferensial berikut

$$\frac{\partial \rho}{\partial \eta} = C_1 \exp(-\eta^2)$$

yang memiliki solusi umum

$$\rho(\eta) = C_1 \int_0^{\eta} \exp(-\eta'^2) d\eta' + C_2 \quad (4.103)$$

Untuk menentukan konstanta C_1 dan C_2 kita menerapkan syarat awal. Salah satu syarat awal adalah

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \rho(x, x'; \beta) = \delta(x - x') \quad (4.104)$$

Dengan syarat awal (4.104) maka persamaan (4.103) dapat ditulis menjadi

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \rho(\eta) = C_1 \lim_{\beta \rightarrow 0} \int_0^{\eta} \exp(-\eta'^2) d\eta' + C_2$$

$$\begin{aligned}
&= C_1 \lim_{\beta \rightarrow 0} \int_0^{(x-x')/\sqrt{2\hbar^2\beta/m}} \exp\left[(x-x')^2/(2\hbar^2\beta/m)\right] \frac{1}{\sqrt{-2\hbar^2\beta/m}} dx C_2 \\
&= \frac{C_1}{\sqrt{-2\hbar^2\beta/m}} \lim_{\beta \rightarrow 0} \int_0^\infty \exp\left[(x-x')^2/(2\hbar^2\beta/m)\right] dx + C_2 \\
&= \frac{C_1}{\sqrt{-2\hbar^2\beta/m}} (-2\hbar^2\beta/m) \delta(x-x') + C_2 = \delta(x-x')
\end{aligned}$$

Dari hubungan ini kita dapatkan

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{-2\hbar^2\beta/m}} = \sqrt{\frac{m}{-2\hbar^2\beta}} \text{ dan } C_2 = 0 \quad (4.105)$$

Akhirnya solusi umum matriks kerapatan menjadi

$$\begin{aligned}
\rho(xx'; \beta) &= \sqrt{\frac{m}{-2\hbar^2\beta}} \int_0^{(x-x')/\sqrt{-2\hbar^2\beta/m}} \exp(-\eta'^2) d\eta' \\
&= \sqrt{\frac{m}{-2\hbar^2\beta}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{(x-x')/\sqrt{-2\hbar^2\beta/m}} \exp(-\eta'^2) d\eta' \right) \\
&= \sqrt{\frac{\pi m}{-8\hbar^2\beta}} \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{m}{-2\hbar^2\beta}} (x-x') \right)
\end{aligned} \quad (4.106)$$

4.13 Matriks Kerapatan Sistem Osilator Harmonik

Berikutnya kita tinjau kasus lain, yaitu osilator harmonik. Hamiltonian osilator harmonik adalah

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \quad (4.107)$$

Dengan demikian persamaan matriks kerapatan menjadi

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \rho = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \rho \quad (4.108)$$

Untuk menyederhakan penyelesaian, sekarang kita perkenalkan variable sebagai berikut

$$\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \quad (4.109)$$

$$f = -\frac{\hbar\omega}{2} \beta = \frac{\hbar\omega}{2kT} \quad (4.110)$$

Dengan variable baru tersebut maka persamaan (4.108) menjadi

$$-\frac{\partial \rho}{\partial f} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi^2} + \xi^2 \rho \quad (4.111)$$

Syarat batas untuk ρ adalah $\rho = \delta(x-x')$ jika $f=0$, atau

$$\rho = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \delta(\xi - \xi') \quad (4.112)$$

Jika $f=0$. Syarat kedua diperoleh setelah kita menggunakan hubungan yang berlaku bagi fungsi delta Dirac, yaitu $\delta(x-x_o) = \left| \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right| \delta(f[x] - f[x_o])$.

Pada suhu tinggi, atau f kecil maka kelakuan partikel akan mendekati kelakuan partikel bebas. Dengan demikian, aproksimasi untuk matrik kerapatan pada suhu tinggi haruslah sama dengan persamaan (4.112). Dengan demikian kita dapat menulis

$$\rho(\xi\xi'; f) \approx \sqrt{\frac{m\omega}{4\pi\hbar f}} \exp\left[-\frac{(\xi - \xi')^2}{4f}\right] \quad (4.113)$$

Untuk mencari fungsi ρ pada berbagai nilai suhu, mari kita misalkan

$$\rho = \exp\left\{-\left[a(f)\xi^2 + b(f)\xi + c(f)\right]\right\} \quad (4.114)$$

dengan a , b , dan c adalah konstanta. Substitusi fungsi coba-coba di atas ke dalam persamaan (4.111), kita peroleh

$$a'\xi^2 + b'\xi + c' = (1 - 4a^2)\xi^2 - 4ab\xi + 2a - b^2 \quad (4.115)$$

Samakan koefisien yang mengandung pangkat ξ yang sama di ruas kiri dan kanan, maka kita peroleh persamaan berikut ini

$$a' = 1 - 4a^2 \quad (4.116a)$$

$$b' = -4ab \quad (4.116b)$$

$$c' = 2a - b^2 \quad (4.116c)$$

Solusi umum persamaan (4.116a) adalah

$$a = \frac{1}{2} \coth 2(f - f_0) \quad (4.117)$$

Dengan menerapkan syarat batas bahwa $\rho = \delta(x-x')$ jika $f = 0$, dan melihat aproksimasi untuk ρ pada suhu tinggi (persamaan (4.113)) maka kita harus mengambil $f_0 = 0$ sehingga

$$a = \frac{1}{2} \coth 2f \quad (4.118)$$

Substitusi persamaan (4.118) ke dalam persamaan (4.116b) kita peroleh solusi untuk parameter b

$$b = \frac{A}{\sinh 2f} \quad (4.119)$$

Substitusi persamaan (4.118) dan (4.119) ke dalam persamaan (4.116c) kita dapatkan solusi untuk c sebagai berikut

$$c = \frac{1}{2} \ln(\sinh 2f) + \frac{A^2}{2} \coth 2f - \ln B \quad (4.120)$$

Pada persamaan (4.119) dan (4.120), A dan B adalah konstanta.

Selanjutnya substitusi a , b , dan c ke dalam persamaan (4.114) kita peroleh ungkapan untuk matriks kerapatan sebagai berikut

$$\rho = \frac{B}{\sqrt{\sinh 2f}} \exp \left\{ - \left[\frac{\xi^2}{2} \coth 2f + \frac{A\xi}{\sinh 2f} + \frac{A^2}{2} \coth 2f \right] \right\} \quad (4.121)$$

Jika diambil $f \rightarrow 0$ maka ρ akan mendekati

$$\rho \rightarrow \frac{B}{\sqrt{2f}} \exp \left\{ - \frac{\xi^2 + 2A\xi + A^2}{4f} \right\} \quad (4.122)$$

Dengan membandingkan persamaan (4.122) dengan (4.113) maka kita simpulkan bahwa

$$A = -\xi'$$

$$B = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar}}$$

Akhirnya kita dapatkan bentuk final untuk matriks kerapatan sebagai berikut

$$\rho(xx'; \beta) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar \sinh 2f}} \exp \left\{ - \frac{m\omega}{2\hbar \sin 2f} [(x^2 + x'^2) \coth 2f - 2xx'] \right\} \quad (4.123)$$

Bab 5

GAS FERMI IDEAL

Untuk melihat salah satu aplikasi mekanika statistik mari kita membahas gas fermi ideal. Gas fermi ideal adalah kumpulan fermion bebas. Tidak ada interaksi antar fermion. Contoh gas fermi ideal adalah gas elektron. Walaupun ada gaya tolak-menolak antar elektron (gaya coulumb) yang menghasilkan energi potensial listrik, namun jika gas elektron berada pada suhu sangat tinggi sehingga energi kinetik yang dimiliki jauh lebih besar daripada energi potensial maka energi potensial (energi interaksi) dapat diabaikan. Dalam kondisi demikian seolah-olah tidak ada interaksi antar elektron. Kalian dapat membandingkan dengan gas ideal klasik di mana antar partikel gas tidak ada interaksi.

Pemahaman tentang topik-topik yang dibahas di bab-bab sebelumnya menjadi modal penting untuk mengikuti bab ini secara lebih mudah.

5.1 Persamaan Keadaan

Kita akan menurunkan persamaan keadaan untuk gas fermi. Kita mulai dari ungkapan fungsi grand partisi untuk fermion, yaitu

$$Z_G = \prod_i (1 + ze^{-\beta\epsilon_i}) \quad (5.1)$$

dengan $z = \exp(\mu/kT)$. Fungsi grand partisi memiliki hubungan langsung dengan perkalian tekanan dan volum, yaitu $Z_G = \exp(PV/kT)$ sehingga

$$\frac{PV}{kT} = \ln Z_G = \ln \prod_i (1 + ze^{-\beta \varepsilon_i}) = \sum_i \ln(1 + ze^{-\beta \varepsilon_i}) \quad (5.2)$$

Tampak jelas di sini betapa strategisnya pernyataan fungsi partisi sebagai bentuk perkalian semua suku. Karena pada akhirnya yang kita butuhkan adalah logaritma fungsi partisi yang berbentuk penjumlahan suku-suku.

Untuk menentukan secara eksplisit fungsi grand partisi pada persamaan (5.2) mari kita ganti tanda penjumlahan terhadap energi dengan integral terhadap variabel momentum. Untuk maksud tersebut, terlebih dahulu kita ubah ungkapan diskrit menjadi kontinu sebagai berikut

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &\rightarrow \frac{p^2}{2m} \\ \sum_i (\dots) &\rightarrow \int (\dots) \frac{V}{h^3} 4\pi p^2 dp \end{aligned} \quad (5.3)$$

Dengan menggunakan persamaan (5.3) maka persamaan (5.2) menjadi

$$\frac{PV}{kT} = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty p^2 \ln(1 + ze^{-\beta p^2/2m}) dp \quad (5.4)$$

Jumlah rata-rata sistem seperti dinyatakan dalam persamaan (3.30) menjadi

$$\begin{aligned} \bar{N} &= kT \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z_G \\ &= kT \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{PV}{kT} \right) \\ &= kT \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty p^2 \ln(1 + ze^{-\beta p^2/2m}) dp \right\} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Dengan mengacu pada definisi z maka kita dapat menulis

$$\frac{\partial}{\partial \mu} = \frac{\partial z}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{kT} e^{\mu/kT} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{z}{kT} \frac{\partial}{\partial z} \quad (5.6)$$

Dengan demikian, jumlah rata-rata sistem dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} \bar{N} &= kT \left(\frac{z}{kT} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left\{ \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty p^2 \ln(1 + ze^{-\beta p^2/2m}) dp \right\} \\ &= \frac{4\pi V z}{h^3} \int_0^\infty p^2 \frac{\partial}{\partial z} \ln(1 + ze^{-\beta p^2/2m}) dp \\ &= \frac{4\pi V z}{h^3} \int_0^\infty p^2 \left(\frac{1}{1 + ze^{-\beta p^2/2m}} \right) e^{-\beta p^2/2m} dp \\ &= \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty p^2 \frac{ze^{-\beta p^2/2m}}{1 + ze^{-\beta p^2/2m}} dp \\ &= \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty p^2 \frac{1}{z^{-1} e^{\beta p^2/2m} + 1} dp \quad (5.7) \end{aligned}$$

Dari semua penjelasan di atas kita merangkum dua persamaan utama, yaitu

$$\frac{P}{kT} = \frac{4\pi}{h^3} \int_0^\infty p^2 \ln(1 + ze^{-\beta p^2/2m}) dp \quad (5.4)$$

$$\frac{1}{v} = \frac{N}{V} = \frac{4\pi}{h^3} \int_0^\infty p^2 \frac{1}{z^{-1} e^{\beta p^2/2m} + 1} dp \quad (5.7)$$

Dua persamaan di atas merupakan persamaan dasar untuk assembli fermion dalam ensemble grand kanonik. Persamaan inilah yang akan kita kaji lebih jauh untuk

mencari sifat termodinamika assempli fermion seperti yang akan dibahas di bagian akhir bab ini.

Agar lebih sederhana, kita definisikan besaran berikut yang dapat diaproksimasi sebagai panjang gelombang termal partikel

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mkT}} \quad (5.8)$$

Panjang gelombang termal adalah panjang gelombang de Broglie berdasarkan momentum partikel yang dihasilkan oleh getaran termal. Panjang gelombang de Broglie memenuhi persamaan $\lambda = h/p$. Berdasarkan teori ekipartisi energi, gerakan termal partikel dalam ruang tiga dimensi memiliki energi rata-rata $\langle K \rangle = (3/2)kT$. Jika momentum rata-rata partikel adalah $\langle p \rangle$ maka kita dapat mengaproksimasi $\langle K \rangle = \langle p^2 \rangle / 2m$. Dengan demikian kita aproksimasi $(3/2)kT = \langle p^2 \rangle / 2m$ atau $\langle p^2 \rangle^{1/2} = (3mkT)^{1/2}$. Panjang gelombang de Broglie kira-kira menjadi $\lambda \approx h / \langle p^2 \rangle^{1/2} = h / (3mkT)^{1/2} = (\hbar^2 / 3mkT)^{1/2}$. Mengingat $\hbar = h/2\pi$ maka $\lambda \approx (4\pi^2\hbar^2 / 3mkT)^{1/2} \approx (4\pi\hbar^2 / mkT)^{1/2}$. Pada persamaan terakhir kita sudah aproksimasi $\pi/3 \approx 1$. Panjang gelombang terakhir yang kita turunkan tidak berbeda jauh dengan persamaan (5.8).

Dari persamaan (5.4) kita definsikan $\beta p^2 / 2m = x^2$. Dengan demikian, $p^2 = 2mx^2 / \beta$; $p = (2m/\beta)^{1/2}x$, dan $dp = (2m/\beta)^{1/2}dx$. Substitusi ke dalam persamaan (5.4) diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{P}{kT} &= \frac{4\pi}{h^3} \int_0^\infty \left(\frac{2mx^2}{\beta} \right) \ln(1 + ze^{-x^2}) \sqrt{\frac{2m}{\beta}} dx \\ &= \frac{4\pi}{h^3} \left(\frac{2m}{\beta} \right)^{3/2} \int_0^\infty x^2 \ln(1 + ze^{-x^2}) dx \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty x^2 \ln(1 + ze^{-x^2}) dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\lambda^3} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^2 \ln(1 + ze^{-x^2}) dx \quad (5.10)$$

Kita definisikan fungsi fermi $f_{5/2}$ sebagai berikut,

$$f_{5/2}(z) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^2 \ln(1 + ze^{-x^2}) dx \quad (5.11)$$

Dengan definisi tersebut maka persamaan (5.10) dapat ditulis menjadi

$$\frac{P}{kT} = \frac{1}{\lambda^3} f_{5/2}(z) \quad (5.12)$$

Dengan cara serupa, persamaan (5.8) dapat ditulis

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} &= \frac{4\pi}{h^3} \int_0^{\infty} \left(\frac{2mx^2}{\beta} \right) \frac{1}{z^{-1}e^{x^2} + 1} \sqrt{\frac{2m}{\beta}} dx \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^3} \right) \int_0^{\infty} x^2 \frac{1}{z^{-1}e^{x^2} + 1} dx = \frac{1}{\lambda^3} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^2 \frac{1}{z^{-1}e^{x^2} + 1} dx \end{aligned} \quad (5.13)$$

Kita definisikan fungsi fermi $f_{3/2}$ sebagai berikut

$$f_{3/2}(z) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{x^2}{z^{-1}e^{x^2} + 1} dx \quad (5.14)$$

Dengan definisi tersebut maka persamaan (5.13) dapat ditulis menjadi

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{\lambda^3} f_{3/2}(z) \quad (5.15)$$

Perhatikan persamaan (5.11). Jika kita lakukan diferensial terhadap z maka

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} f_{5/2}(z) &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^2 \frac{\partial}{\partial z} \ln(1 + ze^{-x^2}) dx \\
&= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^2 \frac{1}{1 + ze^{-x^2}} e^{-x^2} dx = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^2 \frac{1}{e^{x^2} + z} dx \\
&= \frac{1}{z} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^2 \frac{1}{z^{-1} e^{x^2} + 1} dx
\end{aligned}$$

Dengan demikian kita dapatkan hubungan berikut ini

$$z \frac{\partial}{\partial z} f_{5/2}(z) = f_{3/2}(z) \tag{5.16}$$

Bentuk $f_{3/2}(z)$ maupun $f_{5/2}(z)$ pada persamaan (5.11) dan (5.14) kadang sulit untuk dianalisis. Kita dapat mengungkapkan dua fungsi tersebut dalam bentuk deret sehingga dapat menentukan dengan mudah aproksimasi untuk nilai-nilai z yang ekstrim, seperti saat z mendekati nol atau mendekati tak berhingga. Untuk maksud tersebut, mari kita perhatikan uraian berikut ini $1/(1+y) = 1 - y + y^2 - y^3 + \dots$

Dengan uraian tersebut maka kita dapatkan

$$\begin{aligned}
\ln(1 + y) &= \int \frac{dy}{1 + y} = \int (1 - y + y^2 - y^3 + \dots) dy \\
&= y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \dots = \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell+1} \frac{y^{\ell}}{\ell}
\end{aligned}$$

Kita substitusi $y = ze^{-x^2}$ sehingga persamaan di atas menjadi

$$\ln(1 + ze^{-x^2}) = \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell+1} \frac{(ze^{-x^2})^{\ell}}{\ell} = \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell+1} \frac{z^{\ell} e^{-\ell x^2}}{\ell}$$

Dengan demikian kita dapatkan uraian deret untuk fungsi fermi sebagai berikut

$$f_{5/2}(z) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell+1} \frac{z^{\ell}}{\ell} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\ell x^2} dx \quad (5.17)$$

Bagian integral pada persamaan (5.17) sangat standar. Kita dapat menghitung dengan mudah. Kalau ingin lebih cepat kita dapat menggunakan software yang tersedia secara online seperti *Wolfram alpha*. Hasilnya integrasinya adalah $\int_0^{\infty} x^2 e^{-\ell x^2} dx = \sqrt{\pi} / 4\ell^{3/2}$. Dengan demikian, bentuk deret untuk $f_{5/2}(z)$ adalah

$$f_{5/2}(z) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell+1} \frac{z^{\ell}}{\ell} \times \frac{\sqrt{\pi}}{4\ell^{3/2}}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell+1} \frac{z^{\ell}}{\ell^{5/2}} \quad (5.18)$$

Deret pada persamaan (5.18) merupakan bentuk khusus dari fungsi *polylogaritma*. Bentuk umum fungsi tersebut adalah

$$Li_s(z) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z^{\ell}}{\ell^s} \quad (5.19)$$

Dari bentuk ini kita mendapatkan bahwa

$$Li_s(-z) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-z)^{\ell}}{\ell^s} = \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell} \frac{z^{\ell}}{\ell^s} = -\sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell+1} \frac{z^{\ell}}{\ell^s} \quad (5.20)$$

Dengan demikian dapat dibuktikan dengan mudah bahwa

$$f_{5/2}(z) = -Li_{5/2}(-z) \quad (5.21)$$

Fungsi $f_{3/2}$ diperoleh dengan mendiferensiasi $f_{5/2}$ yaitu

$$f_{3/2}(z) = z \frac{d}{dz} f_{5/2}(z) = z \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell+1} \ell \frac{z^{\ell-1}}{\ell^{5/2}}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell+1} \frac{z^{\ell}}{\ell^{3/2}} \quad (5.22)$$

Kalau dinyatakan dalam fungsi polilogartima maka kita dapatkan

$$f_{3/2}(z) = -Li_{3/2}(-z) \quad (5.23)$$

Dari persamaan (5.19) kita dengan mudah mendapatkkan aproksimasi pada nilai z sekitar 0. Kita dapat memilih sejumlah suku sesuai dengan ketelitian yang kita inginkan. Aproksimasi tersebut adalah

- Hanya satu suku: $f_{3/2}(z) \approx z$ (5.24a)

- Sampai dua suku: $f_{3/2}(z) \approx z - \frac{z^2}{2^{3/2}}$ (5.24b)

- Sampai tiga suku: $f_{3/2}(z) \approx z - \frac{z^2}{2^{3/2}} + \frac{z^3}{3^{3/2}}$ (5.24c)

- Sampai empat suku: $f_{3/2}(z) \approx z - \frac{z^2}{2^{3/2}} + \frac{z^3}{3^{3/2}} - \frac{z^4}{4^{3/2}}$ (5.24d)

Selanjutnya kita tinjau kasus ekstrim lainnya, yaitu untuk z yang besar. Pertama mari kita definisikan $v = \mu/kT$ sehingga

$$z = e^{\mu/kT} = e^v \quad (5.25)$$

Dengan definisi ini maka kita dapat menulis

$$f_{3/2}(e^v) = -Li_{3/2}(-e^v) \quad (5.26)$$

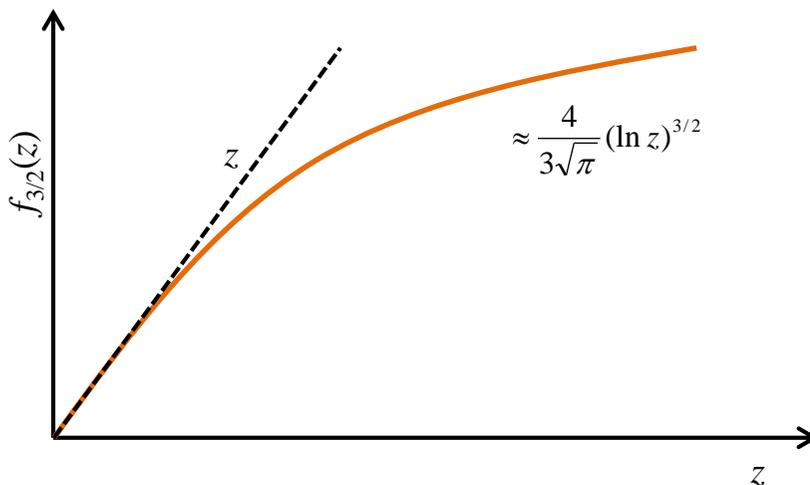
Selanjutnya kita gunakan bentuk asimptotik dari fungsi polilogaritma, yaitu

$$Li_s(-e^v) \underset{\text{Re}(v) \rightarrow \infty}{\approx} -\frac{v^s}{\Gamma(s+1)} \quad (5.27)$$

Dari sifat asimptotik ini maka kita aproksimasi untuk $f_{3/2}$ pada $z \rightarrow \infty$ atau $v \rightarrow \infty$ adalah

$$f_{3/2}(e^v) \approx \frac{v^{3/2}}{\Gamma(3/2+1)} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\ln z)^{3/2} \quad (5.28)$$

Berdasarkan nilai asimptotik pada persamaan (5.24) dan (5.28) maka kita dapat membuat plot grafik $f_{3/2}(z)$ sebagai fungsi z seperti diilustrasikan pada **Gambar 5.1**.



Gambar 5.1 Grafik $f_{3/2}(z)$ sebagai fungsi z . Pada nilai z sangat kecil maka fungsi memenuhi persamaan (5.24) dan pada z yang sangat besar maka fungsi berubah menurut persamaan (5.28).

Sekarang kita tinjau sifat assembli fermion pada beberapa kondisi ekstrim. Dua kasus eksprim yang akan kita bahas adalah kondisi pada suhu tinggi atau kerapatan rendah dan kondisi suhu rendah atau kerapatan tinggi.

5.2 Aplikasi Suhu Tinggi dan Kerapatan Rendah

Pada suhu tinggi laju partikel sangat besar sehingga momentumnya sangat besar. Akibatnya panjang gelombang de Broglie sangat kecil (λ sangat kecil). Pada kerapatan rendah jarak antar partikel sangat besar sehingga volum yang ditempati per partikel besar (ν sangat besar). Akibatnya pada kondisi suhu tinggi dan kerapatan fermion rendah terpenuhi $\lambda^3/\nu \rightarrow 0$. Tetapi $\lambda^3/\nu = f_{3/2}(z)$ sehingga pada kondisi sini $f_{3/2}(z) \rightarrow 0$. Berdasarkan Gambar 5.1, $f_{3/2}(z) \rightarrow 0$ manandakan $z \rightarrow 0$. Dengan demikian, berdasarkan persamaan (5.24) kita dapat melakukan aproksimasi $f_{3/2}(z)$ pada $z \rightarrow 0$, yaitu (dengan mengambil hanya dua suku)

$$f_{3/2}(z) \approx z - \frac{z^2}{2^{3/2}}$$

atau

$$\frac{\lambda^3}{\nu} \approx z - \frac{z^2}{2^{3/2}} \quad (5.29)$$

Untuk mencari solusi bagi z pada persamaan (5.29) kita lakukan operasi rekursif sebagai berikut. Dari persamaan (5.38) kita dapat menulis

$$z \approx \frac{\lambda^3}{\nu} + \frac{z^2}{2^{3/2}}$$

Proses rekursif dilakukan dengan memasukkan z pada bentuk di atas ke dalam z pada suku kedua sehingga

$$\begin{aligned}
z &\approx \frac{\lambda^3}{v} + \frac{1}{2^{3/2}} \left(\frac{\lambda^3}{v} + \frac{z^2}{2^{3/2}} \right)^2 = \frac{\lambda^3}{v} + \frac{1}{2^{3/2}} \left(\frac{\lambda^3}{v} \right)^2 + \frac{1}{2^{3/2}} \left(\frac{\lambda^3 z^2}{2^{3/2} v} + \frac{z^4}{2^3} \right) \\
&\approx \frac{\lambda^3}{v} + \frac{1}{2^{3/2}} \left(\frac{\lambda^3}{v} \right)^2
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Selanjutnya kita mendapatkan jumlah rata-rata sistem pada keadaan energi ke- i , yaitu

$$\bar{n}_i = \frac{z e^{\beta \epsilon_i}}{1 + z e^{\beta \epsilon_i}} \tag{5.31}$$

Mengingat $\beta = -1/kT$ dan ketika $T \rightarrow \infty$ terjadi $z e^{\beta \epsilon_i} \ll 1$ maka

$$\bar{n}_i \approx \frac{z e^{\beta \epsilon_i}}{1 + 0} = z e^{\beta \epsilon_i} = \left(\frac{\lambda^3}{v} \right) e^{-\epsilon_i / kT} \tag{5.32}$$

Persamaan (5.32) merupakan persamaan distribusi Maxwell-Boltzmann (partikel klasik). Ini berarti pada suhu tinggi dan kerapatan rendah fermion berperilaku sebagai partikel klasik. Ketika membahas fermion pada suhu tinggi dan kerapatan rendah sebenarnya kita dapat langsung menggunakan statistik klasik, yaitu Maxwell-Boltzmann, untuk menghindari kerumitan statistik Fermi-dirac.

Persamaan keadaan dapat diperoleh sebagai berikut. Pada nilai $z \rightarrow 0$ maka aproksimasi untuk $f_{5/2}(z)$ menurut persamaan (5.18) adalah $z - z^2/2^{5/2}$. Dengan demikian aproksimasi untuk persamaan keadaan pada suhu tinggi tersebut adalah

$$\begin{aligned}
\frac{P}{kT} &= \frac{1}{\lambda^3} f_{5/2}(z) \approx \frac{1}{\lambda^3} \left(z - \frac{z^2}{2^{5/2}} \right) \\
&\approx \frac{1}{\lambda^3} \left(\frac{\lambda^3}{v} - \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\lambda^6}{v^2} \right) = \frac{1}{v} - \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\lambda^3}{v^2}
\end{aligned}$$

atau

$$\frac{Pv}{kT} \approx 1 - \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\lambda^3}{v} \quad (5.33)$$

Suku kedua di sebelah kanan sangat kecil sehingga praktis $Pv/kT \approx 1$ yang merupakan persamaan keadaan gas ideal klasik.

5.3 Aplikasi Suhu Rendah dan Kerapatan Tinggi

Untuk kondisi ini berlaku $\lambda^3/v \gg 1$ sehingga kita dapat menggunakan aproksimasi persamaan (5.28). Dengan aproksimasi ini maka kita peroleh

$$\frac{\lambda^3}{v} \approx \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\ln z)^{3/2}$$

atau

$$\ln z \approx \left(\frac{3\sqrt{\pi} \lambda^3}{4v} \right)^{2/3} \quad (5.34)$$

Mengingat $z = e^{-\beta\mu}$ maka

$$-\beta\mu \approx \left(\frac{3\sqrt{\pi} \lambda^3}{4v} \right)^{2/3} \quad (5.35)$$

Tetapi $\lambda = \left(\frac{2\pi\hbar}{mkT} \right)^{1/2}$ sehingga

$$\frac{\mu}{kT} \approx \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4v} \right)^{2/3} \lambda^2 = \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4v} \right)^{2/3} \left(\frac{2\pi\hbar}{mkT} \right)$$

atau

$$\mu \approx \left(\frac{2\pi\hbar}{m} \right) \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4v} \right)^{2/3} \quad (5.36)$$

Jumlah sistem yang menempati keadaan energi ke- i adalah

$$\bar{n}_i = \frac{1}{z^{-1} e^{\beta \varepsilon_i} + 1} = \frac{1}{e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)} + 1} \quad (5.37)$$

Jika $\varepsilon_i < \mu$ maka ketika $T \rightarrow 0$ atau $\beta \rightarrow -\infty$ terjadi $\bar{n}_i \approx 1$. Sebaliknya jika $\varepsilon_i > \mu$ maka ketika $T \rightarrow 0$ atau $\beta \rightarrow -\infty$ terjadi $\bar{n}_i \approx 0$. Berikutnya kita akan bahas beberapa aplikasi gas fermi.

5.4 Teori Bintang Katai Putih

Kita mulai pembahasan tentang teori klasik yang diterapkan pada bintang. Bintang dianggap sebagai sebuah bola gas. Bintang yang memiliki massa M dan jari-jari R mempunyai energi potensial gravitasi yang memenuhi persamaan

$$U = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \quad (5.38)$$

dengan $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$ (konstanta gravitasi universal). Penggunaan persamaan di atas menyaratkan bahwa massa jenis bintang tersebar secara homogen (rapat massa di mana-mana konstan). Namun, realitasnya tidak demikian. Massa jenis umumnya makin besar ketika menuju ke pusat bintang. Pusat bintang memiliki massa jenis paling besar. Tetapi sebagai aproksimasi awal (tentu dengan sejumlah kesalahan) kita asumsikan bahwa massa bintang terdistribusi secara homogen.

Tampak dari persamaan (5.38) bahwa makin kecil ukuran bintang maka energi potensial gravitasinya makin kecil. Karena kondisi stabil adalah kondisi dengan energi yang makin kecil maka energi potensial gravitasi cenderung makin memperkecil ukuran bintang (bintang makin mengkerut). Namun, kecenderungan bintang untuk mengkerut dilawan oleh tekanan dari dalam. Dengan asumsi bahwa gas penyusun bintang bersifat menyerupai gas ideal maka tekanan gas dalam bintang

memenuhi persamaan gas ideal

$$P \approx \frac{NkT}{V} \quad (5.39)$$

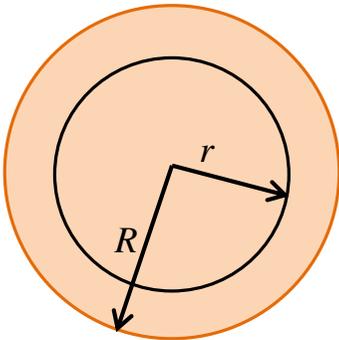
dengan N adalah jumlah atom penyusun bintang.

Jika massa rata-rata satu atom penyusun bintang adalah m maka $N = M/m$.

Dengan demikian tekanan dari dalam bintang dapat diaproksimasi dengan

$$P \approx \frac{M}{m} \frac{kT}{V} = \frac{M}{V} \frac{kT}{m} = \frac{\rho kT}{m} \quad (5.40)$$

dengan ρ adalah rapat massa bintang.



Gambar 5.2 Permukaan Gauss untuk menentukan percepatan gravitasi pada jarak r dari pusat bintang.

Tekanan gravitasi yang dihasilkan di pusat bintang dianggap sama dengan tekanan hidrostatis gas (fluida) penyusun bintang. Tekanan hidrostatis pada jarak r dari pusat bintang memenuhi persamaan

$$\frac{dP}{dr} = \rho g(r) \quad (5.41)$$

dengan $g(r)$ adalah percepatan gravitasi pada jarak r dari pusat bintang. Percepatan tersebut dapat dihitung dengan hukum Gauss sebagai berikut

$$\oint_{S(r)} \vec{g}(r) \cdot d\vec{A} = -4\pi G \int_0^r dM \quad (5.42)$$

dengan $S(r)$ adalah permukaan Gauss yang berbentuk permukaan bola yang berjari-jari r (lihat **Gambar 5.2**). Kita sudah asumsikan bahwa massa bintang tersebar secara homogen sehingga integral di atas menghasilkan

$$g(r)(4\pi r^2) = -4\pi G \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \rho \right)$$

atau

$$g(r) = -\frac{4}{3} \pi G \rho r \quad (5.43)$$

Dengan demikian, persamaan tekanan hidrostatik menjadi

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{4}{3} \pi G \rho^2 r$$

atau

$$P = -\frac{4}{6} \pi G \rho^2 r^2 + C \quad (5.44)$$

Kita ambil syarat batas bahwa tekanan gas di permukaan bintang ($r = R$) adalah nol sehingga diperoleh $C = -(4/6)\pi G \rho^2 R^2$. Akhirnya, tekanan gas pada berbagai posisi di dalam bintang memenuhi

$$P(r) = \frac{4}{6} \pi G \rho^2 (R^2 - r^2) \quad (5.45)$$

Kita bermaksud mencari tekanan gas di pusat bintang akibat gravitasi. Dengan menggunakan persamaan (5.45) tekanan gas di pusat bintang adalah

$$P(0) = \frac{4}{6} \pi G \rho^2 R^2 = \frac{1}{2} \rho G \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) \frac{\rho}{R} = \frac{1}{2} \rho G \frac{M}{R} \quad (5.46)$$

Jari-jari Keseimbangan Bintang

Kita dapat memprediksi jari-jari kesetimbangan bintang dengan dua cara. Cara pertama adalah menyamakan tekanan hidrostatis yang dihasilkan bintang dengan tekanan gas ideal. Cara kedua adalah menyamakan tekanan hidrostatis bintang dengan tekanan radiasi.

Jari-jari Keseimbangan Gas Ideal

Jika tekanan ini disamakan dengan tekanan gas ideal (dalam kondisi seimbang) maka

$$\frac{\rho k T}{m} \approx \frac{1}{2} \frac{\rho G M}{R}$$

atau

$$k T \approx \frac{1}{2} \frac{G M m}{R} \quad (5.47)$$

Dari persamaan ini maka kita peroleh jari-jari setimbang bintang kira-kira memenuhi

$$R \approx \frac{1}{2} \frac{G M m}{k T} \quad (5.48)$$

Dengan menggunakan persamaan (5.46) maka energi termal semua atom

penyusun bintang sekitar

$$E(T) = NkT \approx \frac{1}{2} GMNm / R = \frac{1}{2} GM^2 / R \approx -U \quad (5.49)$$

Tampak bahwa energi termal semua atom penyusun bintang kira-kira sama dengan energi potensial gravitasi.

Jari-jari Keseimbangan Radiasi

Pada Bab 6 kita akan bahas tekanan yang dilakukan oleh radiasi. Reaksi nuklir dalam bintang memancarkan gelombang elektromagnetik ke segala arah. Pancaran radiasi tersebut menghasilkan tekanan yang memenuhi

$$P_r = \frac{\pi^2 (kT)^4}{45 (\hbar c)^3} \quad (5.50)$$

Samakan tekanan ini dengan tekanan di pusat bintang (persamaan (5.46)) maka diperoleh

$$\frac{\pi^2 (kT)^4}{45 (\hbar c)^3} \approx \frac{1}{2} \rho \frac{GM}{R}$$

atau jari-jari setimbang bintang memenuhi

$$R \approx \frac{45}{2\pi^2} \frac{\rho GM (\hbar c)^2}{(kT)^4} \quad (5.51)$$

Perkiraan Parameter-parameter Bintang Katai Putih

Sekarang kita fokuskan pembahasan pada bintang katai putih. Bintang katai putih adalah bintang yang sudah kehabisan bahan bakar hidrogen. Tidak ada reaksi fusi lebih lanjut. Materi penyusun bintang hanyalah helium. Sumber energi bintang semata-mata karena energi gravitasi yang berasal dari kontraksi bintang

secara perlahan-lahan. Energi yang dipancarkan sangat sedikit sehingga bintang tampak putih remang-remang. Contoh bintang ini adalah pengiring Sirius. Bintang ini tidak tampak oleh mata karena terlalu redup tetapi secara periodik menutup Sirius. Bintang ini dan Sirius berotasi mengelilingi pusat massa keduanya.

Perkiraan besaran-besaran fisis bintang katai putih adalah kerapatan $\approx 10^{10}$ kg/m³ $\approx 10^7 \rho_M$, massa $\approx 10^{30}$ kg $\approx M_M$, suhu pusat $\approx 10^7$ K $\approx T_M$. Suhu sebesar 10^7 K berkaitan dengan energi termal sebesar $kT \approx 1,3 \times 10^{-16}$ J $\approx 10^3$ eV. Pada suhu ini semua atom helium terionisasi. Bintang katai putih dapat dipandang sebagai kumpulan inti helium dan electron-elektron yang berberak bebas.

Berdasarkan data kerapatan bintang kita dapat memperkirakan jumlah atom helium per satuan volum. Massa atom helium adalah $4 \times (1,67 \times 10^{-27}$ kg) $\approx 6 \times 10^{-27}$ kg. Jumlah atom helium per satuan volum adalah

$$N_{He} = \frac{\rho}{6 \times 10^{-27}} = \frac{1}{6} \times 10^{37} \text{ atom/m}^3.$$

Satu atom helium menyumbang dua elektron. Dengan demikian, kerapatan electron adalah

$$n = 2N_{He} = \frac{1}{3} \times 10^{37} \text{ electron/m}^3$$

Kerapatan ini melahirkan energi fermi sebesar

$$\varepsilon_F = \left(\frac{2\pi\hbar}{m} \right) \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4v} \right)^{3/2} = \left(\frac{2\pi\hbar}{m} \right) \left(\frac{3n\sqrt{\pi}}{4} \right)^{3/2} \approx 20 \text{ MeV}$$

Tampak bahwa energi fermi jauh lebih besar daripada energi termal ($\varepsilon_F \gg kT$). Dengan demikian dapat dikatakan bahwa dalam bintang katai putih, electron menempati tingkat-tingkat energi paling dasar, jauh di bawah energi fermi. Keadaan ini sangat mirip dengan assembly electron yang berada pada suhu mendekati nol. Jadi meskipun suhu bintang katai putih sangat tinggi, tetapi kerapatan yang luar

biasa tinggi menyebabkan energi fermi sangat besar. Energi yang dimiliki electron sangat jauh di bawah energi fermi. Dari sifat ini kita dapat lakukan idealisasi sebagai berikut

- a) Bintang katai putih adalah assembly N elektron pada keadaan dasar dengan kerapatan sangat tinggi sehingga dinamika electron harus dijelaskan secara relativistic.
- b) Elektron bergerak dalam background $N/2$ buah inti helium yang melakukan gaya gravitasi sehingga seluruh system menyatu membentuk bintang.

Teori Sederhana

Mari kita membahas fenomena bintang katai putih dengan teori yang sederhana. Karena massa elektron sangat kecil dibandingkan dengan massa proton atau neutron maka energi kinetik dalam bintang yang menghasilkan tekanan didominasi oleh energi yang dimiliki elektron. Karena suhu bintang sangat tinggi maka laju elektron sangat besar sehingga energi kinetik harus dinyatakan dalam formula relativistik, yaitu

$$K = (m_0^2 c^4 + p^2 c^2)^{1/2} - m_0 c^2 \quad (5.52)$$

Kita asumsikan bahwa momentum elektron mendekati momentum fermi yaitu

$$p \approx h \left(\frac{3N}{8\pi V} \right)^{1/3} \quad (5.53)$$

Dengan momentum sebesar ini maka energi kinetik elektron jauh melebihi energi diam ($m_0 c^2$). Dengan demikian kita dapat melakukan aproksimasi

$$K \approx pc = \frac{1}{2} (hc) \left[\frac{3N}{\pi V} \right]^{1/3} \quad (5.54)$$

Energi kinetik total elektron memenuhi

$$K_{tot} = \frac{3}{4} N_e K = \frac{3}{8} (N_e hc) \left[\frac{3 N}{\pi V} \right]^{1/3} \quad (5.55)$$

Jika digabung dengan energi potensial gravitasi maka diperoleh energi total bintang sebagai

$$\begin{aligned} E_{tot} &= K_{tot} + U \\ &= \frac{3}{8} (N_e hc) \left[\frac{3 N_e}{\pi V} \right]^{1/3} - \frac{3 GM^2}{5 R} \end{aligned} \quad (5.56)$$

Pada persamaan (5.56) N_e adalah jumlah elektron. Jumlah elektron persis sama dengan jumlah proton. Misalkan jumlah nukleon (proton + netron) penyusun bintang berjumlah N maka jumlah elektron adalah $N_e = xN$ dengan $0 < x < 1$. Massa bintang memenuhi $M \approx Nm_p$ jika diasumsikan massa proton kira-kira sama dengan massa neutron. Persamaan energi total menjadi

$$E_{tot} = \frac{3}{8} (xNhc) \left[\frac{3 xN}{\pi V} \right]^{1/3} - \frac{3 GN^2 m_p^2}{5 R} \quad (5.57)$$

Mengingat $V = (4\pi/3)R^3$ maka

$$E_{tot} = \frac{3 xNhc}{8 R} \left[\frac{9}{4\pi^2} xN \right]^{1/3} - \frac{3 GN^2 m_p^2}{5 R} \quad (5.58)$$

Berdasarkan persamaan (5.58) E_{tot} makin berharga negatif dengan mengecilnya R jika $\frac{3}{5} GN^2 m_p^2 > \frac{3}{8} (xNhc) \left[\frac{9}{4\pi^2} xN \right]^{1/3}$. Makin kecil R maka makin mengecil energi sehingga bintang terus-menerus mengerut tanpa henti. Pengerutan makin cepat jika N makin besar (atau massa bintang makin besar). Pengerutan akan berhenti jika ada batas bawah untuk N . Kita sebut batas bawah tersebut adalah N_{cr} .

Saat pengkerutan berhenti maka terpenuhi

$$\frac{3}{5}GN_{cr}^2m_p^2 \approx \frac{3}{8}(xN_{cr}hc) \left[\frac{9}{4\pi^2} xN_{cr} \right]^{1/3}$$

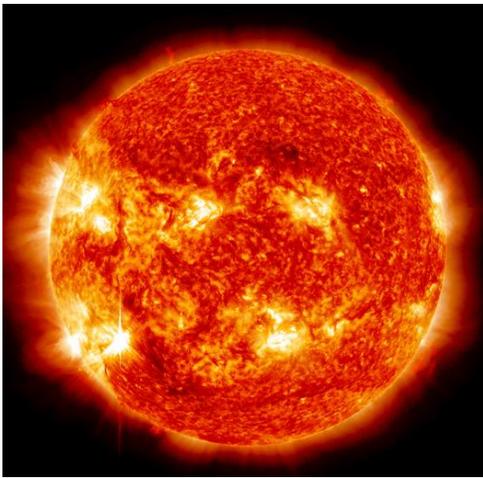
atau

$$N_{cr} \approx \frac{3x^2}{2\pi m_p^3} \left[\frac{5}{8} \frac{hc}{G} \right]^{3/2} \quad (5.59)$$

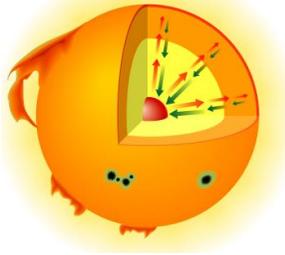
Sebagai contoh, saat bintang kehabisan hidrogen, nukleon yang ada pada bintang hanya inti helium. Jumlah proton persis sama dengan setengah jumlah nukleon. Dengan demikian jumlah elektron persis sama dengan setengah jumlah nukleon, atau $x = 1/2$. Dengan menggunakan $m_p = 1,67 \times 10^{-27}$ kg, $h = 6,625 \times 10^{-34}$ dan $c = 3 \times 10^8$ maka perkiraan jumlah kritis nukleon agar bintang stabil adalah $N_{cr} \approx 2 \times 10^{57}$ nukleon. Dengan demikian, massa kritis bintang agar tidak terus mengkerut adalah $M_{cr} = N_{cr}m_p \approx 3,4 \times 10^{30}$ kg. Massa matahari adalah 2×10^{30} kg. Dengan demikian massa kritis bintang sekitar 1,7 kali massa matahari. Perhitungan lebih seksama oleh Chandrasekhar menghasilkan massa kritis 1,4 kali massa matahari. Nilai ini disebut *limit Chandrasekhar*.

Teori Ensemble Bintang Katai Putih

Sekarang kita akan membahas teori bintang katai putih berangkat dari konsep ensemble grand kanonik untuk fermion. Ada tiga mekanisme yang harus diperhitungkan secara bersamaan pada bintang katai putih, yaitu tekanan elektron akibat eksklusi Pauli, hukum gravitasi, dan dinamika relativistik. **Gambar 5.3** adalah komponen-komponen tekanan yang berperan dalam bintang normal dan bintang katai putih.

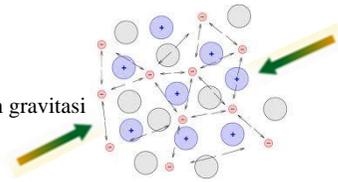


Gaya oleh radiasi →
Gaya oleh gravitasi →



Gaya oleh eksklusi Pauli

Gaya oleh gravitasi



Gambar 5.3 (kiri) Pada bintang normal ukuran bintang dihasilkan dari kompetisi antara gaya gravitasi dan gaya radiasi dan (kanan) pada bintang katai putih ukuran bintang dihasilkan dari kompetisi antara gaya gravitasi dan gaya eksklusi Pauli (globe-views.com, astronomiamo.it).

Kita mulai dengan menentukan energi total relativistik yang dimiliki elektron yang memiliki momentum p , yaitu

$$\varepsilon_p = \sqrt{(m_e c^2)^2 + (pc)^2} \quad (5.60)$$

dengan m_e adalah massa diam elektron. Kita menggunakan persamaan relativistik karena suhu sangat tinggi sehingga laju elektron sangat besar. Pada persamaan (5.60) kita mengabaikan energi potensial. Pada suhu yang sangat tinggi, energi kinetik elektron sangat besar. Akibatnya energi kinetik jauh melampaui energi potensial coulomb elektron sehingga energi potensial dapat diabaikan.

Walaupun suhu bintang katai putih sangat tinggi, namun energi termal elektron sangat jauh di bawah energi Fermi. Kelakuan bintang katai putih menyerupai assemblasi dengan suhu mendekati nol. Pada suhu mendekati nol maka sistem menempati tingkat-tingkat energi rendah. Batas teratas energi yang ditempati adalah energi fermi. Dengan demikian, energi total assemblasi gas fermi pada pada bintang katai putih dapat didekati dengan

$$\begin{aligned}
 E &= 2 \sum_{|p|=0}^{\infty} f(p) \varepsilon_p \\
 &= 2 \sum_{|p|=0}^{p_F} f(p) \varepsilon_p + 2 \sum_{|p|=p_F}^{\infty} f(p) \varepsilon_p
 \end{aligned} \tag{5.61}$$

Faktor 2 dimasukkan karena tiap tingkat energi ditempati oleh dua electron dengan arah spin berlawanan. Karena pada suhu mendekati nol fungsi distribusi Fermi-Dirac memenuhi

$$f(p) = \begin{cases} 1 & |p| \leq p_F \\ 0 & |p| > p_F \end{cases} \tag{5.62}$$

Maka kita dapat menulis

$$E = 2 \sum_{|p|=0}^{p_F} \varepsilon_p \tag{5.63}$$

Penjumlahan pada persamaan (5.63) dapat diganti dengan integral dengan terlebih dahulu melakukan transformasi sebagai berikut

$$\sum_{|p|=0}^{p_F} (\dots) \rightarrow \int_0^{p_F} (\dots) \frac{V}{h^3} (4\pi p^2 dp)$$

Dengan transformasi tersebut maka persamaan (5.63) menjadi

$$E = \frac{8\pi V}{h^3} \int_0^{p_F} \sqrt{(m_e c^2)^2 + (pc)^2} p^2 dp \quad (5.64)$$

Untuk menyelesaikan integral (5.64) kita ganti vasiabel berikut ini $pc/m_e c^2 = x$. Dengan penggantian variabel tersebut kita dapatkan $p = m_e c x$, $dp = m_e c dx$, dan $p_F = m_e c x_F$. Dengan permisalan di atas maka persamaan (5.64) menjadi

$$\begin{aligned} E &= \frac{8\pi V}{h^3} \int_0^{p_F} m_e c^2 \sqrt{1 + \left(\frac{p}{m_e c}\right)^2} p^2 dp \\ &= \frac{8\pi V}{h^3} \int_0^{x_F} m_e c^2 \sqrt{1 + x^2} (m_e c x)^2 (m_e c dx) \\ &= \frac{8\pi V}{h^3} m_e^4 c^5 \int_0^{x_F} x^2 \sqrt{1 + x^2} dx \end{aligned} \quad (5.64)$$

Energi rata-rata yang tiap elektron adalah

$$\begin{aligned} \frac{E}{N} &= \frac{8\pi(V/N)}{h^3} m_e^4 c^5 \int_0^{x_F} x^2 \sqrt{1 + x^2} dx \\ &= \frac{8\pi v m_e^4 c^5}{h^3} f(x_F) = \frac{v m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} f(x_F) \end{aligned} \quad (5.65)$$

dengan

$$f(x_F) = \int_0^{x_F} x^2 \sqrt{1+x^2} dx \quad (5.74)$$

Sekarang kita eksplorasi dua kasus ekstrim yaitu untuk $x_F \ll 1$ dan $x_F \gg 1$

1.

a) Jika $x_F \ll 1$ maka pada semua daerah integrasi kita dapat melakukan aproksimasi

$$\sqrt{1+x^2} \approx 1 + \frac{1}{2}x^2 + \dots$$

$$\begin{aligned} f(x_F) &\approx \int_0^{x_F} x^2 \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \dots\right) dx = \int_0^{x_F} \left(x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \dots\right) dx = \frac{1}{3}x_F^3 + \frac{1}{10}x_F^5 + \dots \\ &= \frac{1}{3}x_F^3 \left(1 + \frac{3}{10}x_F^2 + \dots\right) \end{aligned} \quad (5.75)$$

b) Sebaliknya, jika $x_F \gg 1$ kita dapat menulis sebagai berikut

$$f(x_F) = \int_0^{x_F} x^2 \sqrt{1+x^2} dx = \int_0^{\psi} x^2 \sqrt{1+x^2} dx + \int_{\psi}^{x_F} x^2 \sqrt{1+x^2} dx$$

di mana ψ adalah bilangan yang cukup besar dibanding dengan satu tetapi jauh lebih kecil dari x_F ($1 \ll \psi < x_F$). Dengan sifat tersebut kita dapat mengaproksimasi

$$\sqrt{1+\psi^2} = \psi(1+1/\psi^2)^{1/2} \approx \psi(1+1/2\psi^2) \approx \psi + 1/2\psi. \text{ Karena pada integral di ruas}$$

kanan semua $x > \psi$ maka untuk semua x kita dapat mengaproksimasi suku yang mengandung akar dengan $x + 1/2x$. Dengan demikian integral dapat diaproksimasi menjadi

$$f(x_F) \approx \int_0^{\psi} x^2 \sqrt{1+x^2} dx + \int_{\psi}^{x_F} x^2 (x + 1/2x) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\psi} x^2 \sqrt{1+x^2} dx + \int_{\psi}^{x_F} (x^3 + x/2) dx = \int_0^{\psi} x^2 \sqrt{1+x^2} dx + \left[\frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{4} x^2 \right]_{-\psi}^{x_F} \\
&= \int_0^{\psi} x^2 \sqrt{1+x^2} dx + \left(\frac{1}{4} x_F^4 + \frac{1}{4} x_F^2 \right) - \left(\frac{1}{4} \psi^4 + \frac{1}{4} \psi^2 \right)
\end{aligned}$$

Mengingat $\psi \ll x_F$ maka suku-suku yang mengandung ψ dapat dibuang (karena jauh lebih kecil daripada suku-suku yang mengandung x_F) dan kita dapat melakukan aproksimasi lebih lanjut sebagai berikut

$$f(x_F) \approx \left(\frac{1}{4} x_F^4 + \frac{1}{4} x_F^2 \right) = \frac{1}{4} x_F^4 \left(1 + \frac{1}{x_F^2} \right) \quad (5.75)$$

Misalkan massa total bintang M dan jari-jarinya R maka

$$M = Nm_e + \frac{N}{2} m_{He} = Nm_e + \frac{N}{2} (2m_p + 2m_n) \quad (5.78)$$

Karena $m_n \approx m_p$ dan $m_e \ll m_p$ maka

$$M \approx 2Nm_p \quad (5.79)$$

$$V = \frac{4\pi}{3} R^3$$

atau

$$R = \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{1/3} \quad (5.80)$$

$$v = \frac{V}{N} = \frac{4\pi R^3 / 3}{M / 2m_p} = \frac{8\pi m_p R^3}{3 M} \quad (5.81)$$

$$x_F = \frac{\hbar}{m_e c} \left(\frac{3\pi^2}{v} \right)^{1/3} = \frac{\hbar}{m_e c R} \left(\frac{9\pi}{8} \frac{M}{m_p} \right)^{1/3} = \frac{\bar{M}^{1/3}}{\bar{R}} \quad (5.82)$$

dengan

$$\bar{M} = \frac{9\pi}{8} \frac{M}{m_p} \quad (5.83)$$

$$\bar{R} = \frac{R}{\hbar / m_e c} \quad (5.84)$$

Perlu diketahui bahwa $\hbar/m_e c$ adalah panjang gelombang Compton. Jadi \bar{R} adalah jari-jari bintang dalam satuan panjang gelombang Compton.

Dari energi assempli kita dapat menghitung tekanan yang dilakukan oleh gas fermi sebagai berikut

$$\begin{aligned} P_{fermi} &= -\frac{\partial E_o}{\partial V} = -\frac{\partial}{\partial V} \left[\frac{m_e^4 c^5 N v}{\pi^2 \hbar^2} f(x_F) \right] \\ &= -\frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^2} \frac{\partial}{\partial v} [v f(x_F)] \\ &= -\frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^2} \left[f(x_F) + v \frac{\partial f(x_F)}{\partial v} \right] \\ &= -\frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^2} \left[f(x_F) + v \frac{\partial f(x_F)}{\partial x_F} \frac{\partial x_F}{\partial v} \right] \end{aligned} \quad (5.85)$$

Dengan menggunakan (5.77) maka

$$\frac{\partial f(x_F)}{\partial x_F} = x_F^2 \sqrt{1+x_F^2}$$

$$x_F = \frac{\hbar}{m_e c} \left(\frac{3\pi^2}{v} \right)^{1/3} = \frac{\hbar}{m_e c} (3\pi^2)^{1/3} v^{-1/3}$$

$$\frac{\partial x_F}{\partial v} = -\frac{1}{3} \frac{\hbar}{m_e c} (3\pi^2)^{1/3} v^{-4/3} = -\frac{1}{3v} \frac{\hbar}{m_e c} (3\pi^2)^{1/3} v^{-1/3} = -\frac{x_F}{3v}$$

Jadi

$$P_{fermi} = -\frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^2} \left[f(x_F) + v x_F^2 \sqrt{1+x_F^2} \left(-\frac{x_F}{3v} \right) \right]$$

$$= \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^2} \left[\frac{1}{3} x_F^3 \sqrt{1+x_F^2} - f(x_F) \right] \quad (5.86)$$

Tekanan non Relativistik

Untuk kasus nonrelativistik di mana $x_F \ll 1$ kita gunakan $f(x_F)$ pada persamaan (5.75) dan diperoleh

$$P_{fermi} \approx \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^2} \left[\frac{1}{3} x_F^3 \left(1 + \frac{1}{2} x_F^2 + \dots \right) - \frac{1}{3} x_F^3 \left(1 + \frac{3}{10} x_F^2 + \dots \right) \right]$$

$$\approx \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^2} \left[\frac{1}{6} x_F^5 - \frac{1}{10} x_F^5 \right] = \frac{m_e^4 c^5}{15 \pi^2 \hbar^2} x_F^5$$

$$= \frac{4}{5} K \frac{\bar{M}^{5/3}}{\bar{R}^5} \quad (5.87)$$

Tekanan Relativistik

Untuk kasus relativistik di mana $x_F \gg 1$ kita gunakan $f(x_F)$ pada persamaan (5.76) dan diperoleh

$$\begin{aligned}
P_{fermi} &\approx \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^2} \left[\frac{1}{3} x_F^3 \left(x_F \sqrt{1 + \frac{1}{x_F^2}} \right) - \frac{1}{4} x_F^4 \left(1 + \frac{1}{x_F^2} + \dots \right) \right] \\
&\approx \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^2} \left[\frac{1}{3} x_F^4 \left(1 + \frac{1}{2x_F^2} + \dots \right) - \frac{1}{4} x_F^4 - \frac{1}{4} x_F^2 - \dots \right] \\
&\approx \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^2} \left[\frac{1}{12} x_F^4 - \frac{1}{12} x_F^2 \right] \\
&= \frac{m_e^4 c^5}{12 \pi^2 \hbar^2} [x_F^4 - x_F^2] \\
&= K \left(\frac{\bar{M}^{4/3}}{\bar{R}^4} - \frac{\bar{M}^{2/3}}{\bar{R}^2} \right) \tag{5.88}
\end{aligned}$$

dengan

$$K = \frac{m_e c^2}{12 \pi^2} \left(\frac{m_e c}{\hbar} \right)^3 \tag{5.89}$$

Kondisi Keseimbangan

Kita akan mencari kondisii kesetimbang sebagai berikut. Kondisi setimbang terjadi jika gaya dari arah dalam yang berasal dari tekanan fermion sama dengan gaya dari arah luar akibat gravitasi. Kita lakukan proses berikut ini.

Misalkan tidak ada interaksi gravitasi. Kerapatan materi bintang akan homogen dan materi bintang akan tersebar dalam ruang yang tak berhingga. Gravitasilah yang memyebabkan kerapatan materi makin besar ketika menuju ke pusat bintang. Gravitasilah yang menyebabkan bintang memiliki batas terluar, yaitu tidak tersebar dalam ruang tak berhingga. Apabila gravitasi tidak ada maka agar bintang memiliki batas terluar yang jelas diperlukan dinding pembatas untuk menahan materi. Kerja yang diperlukan untuk mengkompresi materi bintang ke bentuk yang memiliki massa dan jari-jari tertentu sehingga memiliki tekanan P_0 adalah

$$\begin{aligned}
W &= -\int_{\infty}^R \vec{F} \cdot d\vec{r} \\
&= -\int_{\infty}^R (P_o 4\pi r^2) dr
\end{aligned} \tag{5.90}$$

Sekarang bayangkan interaksi gravitasi tiba-tiba di-ON-kan.

Bagian-bagian bintang akan saling tarik menarik sehingga menghasilkan penurunan energi. Jumlah penurunan energi tersebut disebut *gravitational self energy*.

Besarnya energi tersebut dapat diperkirakan sebagai berikut.

Energi potensial gravitasi (*gravitation self energy*) bintang diberikan oleh persamaan (5.47). Karena ukuran bintang tidak lagi berubah maka gaya yang dilakukan oleh *gravitational self energy* harus tepat sama dengan gaya yang dilakukan “oleh dinding artifisial bintang”. Dengan kata lain, gaya oleh “dinding artifisial” tersebut berasal dari gaya gravitasi. Gaya oleh dinding bintang adalah

$$\begin{aligned}
F_{dinding} &= -\frac{dW}{dR} = \frac{d}{dR} \int_{\infty}^R P_o (4\pi r^2) dr \\
&= 4\pi P_o R^2
\end{aligned} \tag{5.91}$$

Gaya oleh *gravitational self energy* adalah

$$F_{self} = -\frac{dU}{dR} = -\frac{3}{5} G \frac{M^2}{R^2} \tag{5.92}$$

Kedua gaya tersebut sama besar, $|F_{dinding}| = |F_{self}|$, sehingga

$$4\pi P_o R^2 = \frac{3}{5} G \frac{M^2}{R^2}$$

atau

$$\begin{aligned}
P_o &= \frac{3}{20\pi} G \frac{M^2}{R^4} \\
&= \frac{3}{20\pi} G \left(\frac{8m_p}{9} \right)^2 \left(\frac{m_e c}{h} \right)^4 \frac{\bar{M}^2}{\bar{R}^4} \\
&= K' \frac{\bar{M}^2}{\bar{R}^4}
\end{aligned} \tag{5.93}$$

dengan

$$K' = \frac{3}{20\pi} G \left(\frac{8m_p}{9} \right)^2 \left(\frac{m_e c}{h} \right)^4 \tag{5.94}$$

Bintang katai putih memiliki kerapatan sangat tinggi sehingga memenuhi persamaan relativistic ($x_F \gg 1$). Tekanan gas fermi, P_{fermi} , pada kondisi ini memenuhi persamaan (5.88). Samakan P_o pada persamaan (5.93) dengan P_{fermi} pada persamaan (5.88) maka diperoleh

$$K' \frac{\bar{M}^2}{\bar{R}^4} = K \left(\frac{\bar{M}^{4/3}}{\bar{R}^4} - \frac{\bar{M}^{2/3}}{\bar{R}^2} \right)$$

yang akhirnya memberikan ungkapan jari-jari bintang katai putih

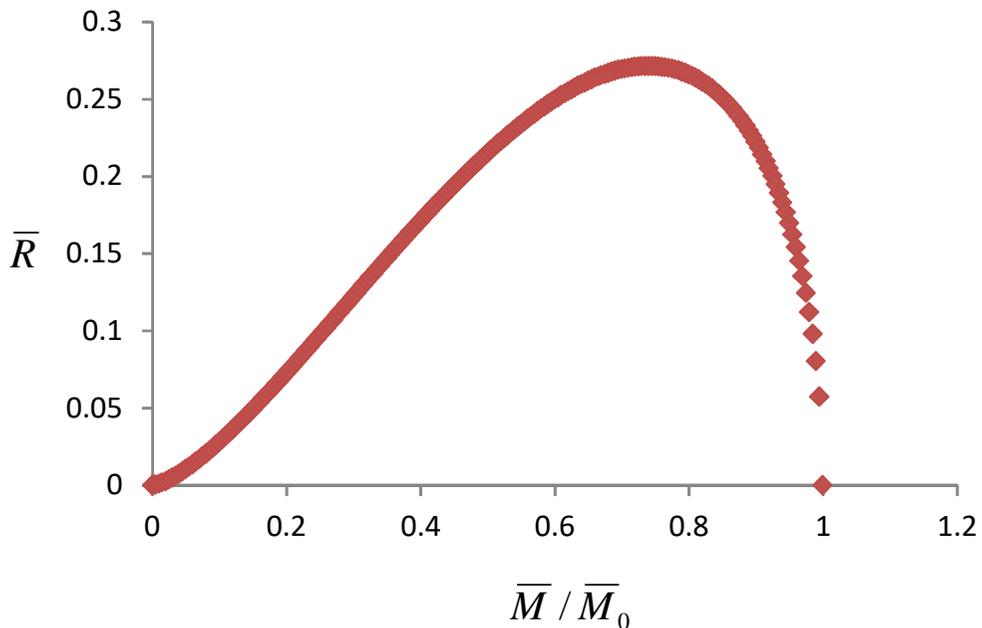
$$\bar{R} = \bar{M}^{3/2} \sqrt{1 - (\bar{M} / \bar{M}_o)^{2/3}} \tag{5.95}$$

dengan

$$\bar{M}_o = (K / K')^{3/2} = \left(\frac{135\pi}{192} \right)^{3/2} \left(\frac{\hbar c}{Gm_p^2} \right)^{3/2} \tag{5.96}$$

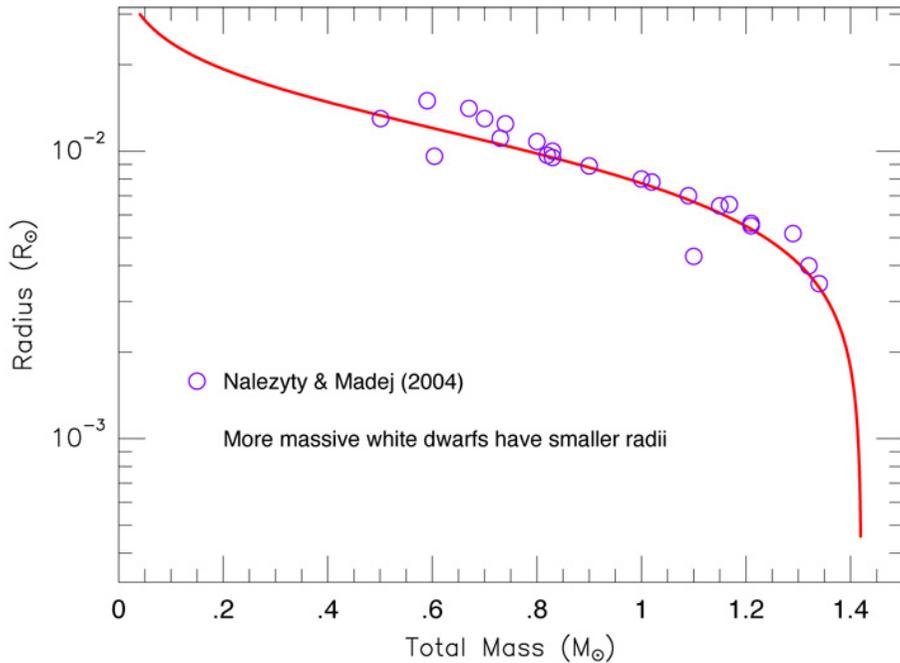
Gambar 5.4 adalah plot jari-jari bintang karai putih sebagai fungsi massa menurut

persamaan (5.95). Dengan memasukkan nilai konstanta yang sudah baku maka diperoleh $\bar{M}_0 \approx 7.3 \times 10^{57}$. Atau dalam satuan kilogram diperoleh $M_o \approx \frac{8m_p}{9\pi} \bar{M}_0 \approx 3,43 \times 10^{30}$ kg. Karena massa matahari adalah 2×10^{30} kg maka $M_0 \approx 1,7$ massa matahari.



Gambar 5.3 Plot jari-jari bintang karai putih sebagai fungsi massa yang dihitung menggunakan persamaan (5.95). satuan jari-jari masih sembarang.

Dari persamaan (5.95) tampak bahwa tidak ada solusi jika $\bar{M} > \bar{M}_0$. Hasil ini mengindikasikan bahwa tidak mungkin bintang katai putih memiliki massa lebih besar daripada massa matahari. Ada batas terbesar massa bintang agar menjadi katai putih.



Gambar 5.4 Kebergantungan jari-jari bintang katai putih terhadap massa awal bintang berdasarkan teori yang lebih teliti. Massa pada sumbu datar dinyatakan dalam satuan massa matahari sedangkan jari-jari pada sumbu vertikal dinyatakan dalam satuan jari-jari matahari (cpp.edu).

Teori yang lebih teliti yang dibangun para ahli memberikan kurva yang berbeda dengan kurva pada **Gambar 5.3**. Sebagai contoh ditunjukkan bahwa jari-jari bintang katai putih adalah fungsi monoton turun terhadap massa bintang dan mencapai nilai kritis ketika massa bintang sekitar limit Chandrasekhar.

Gambar 5.4 adalah kurva teoretik dan sejumlah data eksperimen tentang bintang katai putih.

5.5 Diamagnetisme Landau

Sekarang kita akan bahas aplikasi gas fermi untuk menjelaskan fenomena diamagnetisme. Dengan menggunakan mekanika statistik klasik, fenomena diamagnetisme tidak muncul. Fenomena ini muncul ketika atom-atom dipandang secara mekanika kuantum. Diamagnetisme muncul akibat kuantisasi orbital atom-atom. Dalam mekanika klasik, kuantisasi orbital atom tidak ada. Elektron-elektron dianggap mengelilingi inti dalam orbit sembarang sehingga meniadakan efek diamagnetisasi. Pada bagian ini kita akan jelaskan fenomena diamagnetisme dalam konsep ensemble grand kanonik untuk fermion.

Kita mulai dari definisi susceptibilitas magnetik yang memenuhi persamaan

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial B} \quad (5.97)$$

dengan M adalah magnetisasi. Jika M_i adalah magnetisasi assembli ke- i maka momen magnetik total assembli ke- i adalah $\mu_{\text{tot},i} = M_i V$. Dengan demikian, energi magnetik assembli ke- i adalah $E_i = -\mu_{\text{tot},i} B = -M_i V B$. Magnetisasi rata-rata assembli memenuhi

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \frac{\sum_i M_i e^{\beta E_i}}{\sum_i e^{\beta E_i}} = \frac{\sum_i M_i e^{-\beta M_i V B}}{\sum_i e^{-\beta M_i V B}} \\ &= \frac{\sum_i \left(-\frac{1}{\beta V} \right) \frac{\partial}{\partial B} e^{-\beta M_i V B}}{\sum_i e^{-\beta M_i V B}} = -\frac{1}{\beta V} \frac{\partial}{\partial B} \frac{\sum_i e^{-\beta M_i V B}}{\sum_i e^{-\beta M_i V B}} \\ &= -\frac{1}{\beta V} \frac{\partial}{\partial B} \ln \sum_i e^{-\beta M_i V B} = \frac{kT}{V} \frac{\partial}{\partial B} \ln Z_N \end{aligned} \quad (5.98)$$

Suatu assembli disebut diamagnet jika $\chi < 0$ dan paramagnetik jika $\chi > 0$. **Tabel 5.1** adalah susseptibilitas sejumlah bahan diamagnetik.

Tabel 5.1 Susseptibilitas sejumlah bahan diamagnetik (dari berbagai sumber)

Bahan	Susseptibilitas (m^3/kg)
Bismuth	$-1,66 \times 10^{-5}$
Tembaga	$-9,8 \times 10^{-6}$
Intan	$-2,2 \times 10^{-5}$
Emas	$-3,6 \times 10^{-5}$
Timbal	$-1,7 \times 10^{-5}$
Air raksa	$-2,9 \times 10^{-5}$
Nitrogen	$-5,0 \times 10^{-9}$
Perak	$-2,6 \times 10^{-5}$
Silikon	$-4,2 \times 10^{-6}$

Sifat magnetik suatu zat secara dominan dipengaruhi oleh elektron-elektron dalam zat tersebut, baik elektron bebas maupun elektron yang terikat pada atom. Di bawah pengaruh medan magnetik luar elektron akan bergerak dalam orbit yang terkuantisasi dan spin elektron cenderung mengambil arah sejajar dengan arah medan. Inti atom memberi kontribusi yang sangat kecil pada sifat magnetik bahan sehingga sering diabaikan. Penyearahan spin yang sejajar medan magnetik luar memberi kontribusi pada efek paramagnetisme. Sedangkan gerak elektron dalam orbital terkuantisasi memberi efek pada fenomena diamagnetisme.

Kuantisasi Jari-jari Orbit dan Energi

Sekarang kita fokuskan pembahasan pada fenomena diamagnetisme. Elektron dianggap tidak berspin (keberadaan spin diabaikan). Hal ini dapat dilakukan karena efek yang akan kita pelajari bukan penyearahan spin oleh medan luar tetapi kuantisasi orbit elektron oleh medan luar. Penyerahan spin hanya menghasilkan efek paramagnetisme atau ferromagnetisme. Misalkan terdapat N

elektron yang berada dalam ruang bervolum V . Ruang di sini bisa saja berupa potongan logam. Jadi tidak harus assembli yang isinya hanya gas elektron bebas. Di dalam ruang tersebut diterapkan medan magnetik luar \vec{B} . Menurut teori kuantum klasik, terkuantisasi orbit partikel memenuhi persamaan

$$\oint \vec{p} \cdot d\vec{r} = (j + 1/2)h \quad (5.99)$$

dengan $j = 0, 1, 2, \dots$ merupakan bilangan kuantum orbital.

Antara satu elektron dengan elektron lain dianggap tidak ada interaksi. Dengan demikian, ketika membangun hamiltonian yang menjelaskan gerak elektron, kita cukup membangun hamiltonian elektron tunggal. Komponen hamiltonian hanya energi kinetik elektron. Hamiltonian elektron tunggal dalam medan magnetik memenuhi persamaan

$$H(\vec{p}, \vec{r}) = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \quad (5.100)$$

dengan \vec{A} adalah vektor potensial. Sudah kita pelajari di kuliah listrik magnet atau elektrodinamika bahwa vektor potensial memenuhi persamaan

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (5.101)$$

Jika tidak ada gerakan elektron sejajar medan magnet maka bentuk orbit electron berupa lingkaran dengan jari-jari a . Gaya yang dialami elektron adalah gaya Lorentz yang arahnya tegak lurus kecepatan (menuju ke pusat lingkaran). Gaya ini kita kenal dengan gaya sentripetal. Gaya tersebut tidak mengubah laju elektron tetapi hanya mengubah arah sehingga berbentuk lingkaran. Laju elektron selalu konstan dan memenuhi,

$$\frac{m|\vec{v}|^2}{a} = \frac{e|\vec{v}|B}{c}$$

atau

$$|\vec{v}| = \frac{eaB}{mc} \quad (5.102)$$

Partikel bermuatan yang bergerak dalam medan magnet memiliki dua komponen momentum. Komponen pertama disumbang oleh kecepatannya sendiri dan komponen kedua disumbang oleh vektor potensial medan. Momentum total (kanonik) elektron dalam medan magnet memenuhi

$$\vec{p} = m\vec{v} - \frac{e}{c} \vec{A} \quad (5.103)$$

Dengan menggunakan momentum pada persamaan (5.103) maka persamaan kuantisasi (5.99) dapat ditulis menjadi

$$\oint \left(m\vec{v} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \cdot d\vec{r} = (j + 1/2)h$$

$$\oint m\vec{v} \cdot d\vec{r} - \frac{e}{c} \oint \vec{A} \cdot d\vec{r} = (j + 1/2)h$$

Karena \vec{v} menyinggung lingkaran $d\vec{r}$ adalah perpindahan posisi elektron (juga menyinggung lingkaran) maka \vec{v} dan $d\vec{r}$ selalu sejajar. Oleh karena itu suku pertama di ruas kiri persamaan di atas menjadi

$$\oint m\vec{v} \cdot d\vec{r} = m|\vec{v}| \oint dr = m|\vec{v}|(2\pi a)$$

Integral kedua di ruas kiri diselesaikan dengan menggunakan hukum Stokes berikut ini

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = B(\pi a^2)$$

Dengan demikian persamaan kuantisasi orbital dapat ditulis menjadi

$$m|\vec{v}|(2\pi a) - \frac{e}{c} B(\pi a^2) = (j+1/2)h$$

$$m\left(\frac{eaB}{mc}\right)(2\pi a) - \frac{e}{c} B(\pi a^2) = (j+1/2)h$$

$$\frac{e}{c} B(\pi a^2) = (j+1/2)h$$

atau

$$a^2 = \frac{c}{\pi e B} (j+1/2)h \quad (5.104)$$

Persamaan (5.104) dengan jelas memperlihatkan kuantisasi jari-jari orbital. Besar jari-jari orbital memenuhi $a \propto (j+1/2)^{1/2}$. Jari-jari orbital makin kecil jika medan yang diterapkan makin besar. Jika medan yang diterapkan mendekati nol maka jari-jari orbit menuju tak berhingga. Jari-jari tak berhingga tidak lain menyatakan lintasan berbentuk garis lurus.

Setelah mendapatkan kuantisasi jari-jari orbital maka kita dapat menurunkan kuantisasi energi. Energi yang dimiliki elektron dalam medan magnetik hanya energi kinetik. Medan magnetik tidak memberi kontribusi energi pada partikel bermuatan. Apabila elektron hanya memiliki komponen kecepatan yang tegak lurus medan magnetik maka energi kinetik yang berkaitan dengan keadaan orbital ke- j adalah

$$\frac{1}{2} m|\vec{v}|^2 = \frac{1}{2} m\left(\frac{eaB}{mc}\right)^2 = \frac{1}{2} m\left(\frac{eB}{mc}\right)^2 a^2$$

$$= \frac{1}{2} m \left(\frac{eB}{mc} \right)^2 \left[\frac{c}{\pi e B} (j+1/2) h \right]$$

$$= \frac{1}{2} \frac{eB}{\pi mc} (j+1/2) h = \frac{eB\hbar}{mc} (j+1/2) \quad (5.105)$$

Namun, jika elektron memiliki juga komponen kecepatan yang sejajar medan magnetik maka komponen kecepatan yang sejajar medan tidak terkuantisasi. Energi kinetik total electron sama dengan jumlah energi terkuantisasi dalam arah x dan y (dalam bidang tegak lurus medan) serta energi kinetik dalam arah z (bersifat kontinu), yaitu

$$\varepsilon(p_z, j) = \frac{eB\hbar}{mc} (j+1/2) + \frac{p_z^2}{2m} \quad (5.106)$$

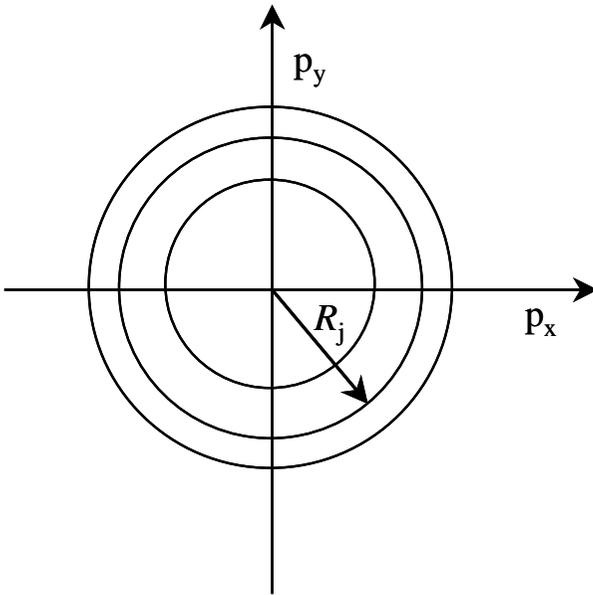
di mana p_z adalah momentum dalam arah z (sejajar medan magnet).

Selanjutnya kita akan mencari degenerasi energi $\varepsilon(p_z, j)$. Degenerasi tersebut dapat ditentukan dengan membandingkan ungkapan energi kinetik dalam bidang yang tegak lurus medan, yaitu $\frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2)$ dengan ungkapan energi kinetik pada persamaan (5.106). Dengan adanya medan magnet maka gerak bebas (gerak yang bersifat kontinu) dalam bidang x dan y menjadi terkuantisasi dengan energi $\frac{eB\hbar}{mc}(j+1/2)$. Dalam medan magnet, elektron tidak bisa lagi memiliki momentum arah x dan y sembarang. Momentum arah x dan y harus tertentu sehingga energi kinetiknya sama dengan (5.105). Ini berarti, dalam diagram p_x dan p_y lintasan elektron akan berupa lingkaran dengan jari-jari R . Jari-jari R tersebut adalah besar momentum total elektron dalam bidang (x,y) . Dengan demikian jari-jari tersebut memenuhi $R^2 = p_x^2 + p_y^2$. Karena energi kinetik total dalam bidang (x,y) memenuhi persamaan (5.105) maka haruslah

$$\frac{R_j^2}{2m} = \frac{eB\hbar}{mc}(j+1/2)$$

atau

$$R_j^2 = \frac{2eB\hbar}{c}(j+1/2) \quad (5.107)$$



Gambar 5.6 Kuantisasi orbit elektron dalam bidang (x,y) .

Momentum dalam arah x dan y terikat oleh persamaan

$$R^2 = p_x^2 + p_y^2. \text{ Dengan demikian energi kinetik total dalam}$$

bidang (x,y) adalah $R^2/2m$.

Perhatikan **Gambar 5.6**. Luas daerah antara dua lintasan berurutan, yaitu lintasan ke- j dan ke- $j+1$ adalah

$$\Delta A = \pi R_{j+1}^2 - \pi R_j^2$$

$$\begin{aligned}
&= \pi \times \frac{2eB\hbar}{c} ([j+1] + 1/2) - \pi \times \frac{2eB\hbar}{c} (j + 1/2) \\
&= \frac{2\pi eB\hbar}{c}
\end{aligned} \tag{5.108}$$

Tampak dari persamaan (5.108) bahwa luas daerah antara dua orbit berdekatan selalu konstan, tidak bergantung pada bilangan kuantum j . Ini berimplikasi bahwa makin ke arah luar maka lingkaran orbital makin rapat untuk menjamin luas daerah antar lingkaran tetap sama.

Saat medan magnet tidak ada, keadaan-keadaan dalam ruang fase tersebar secara merata dalam bidang p_x dan p_y . Namun, ketika medan magnet diberikan, keadaan-keadaan dari daerah seluas ΔA sesuai dengan persamaan (5.108) terkumpul pada lintasan kuantisasi saja. Jadi, penerapan medan magnet menyebabkan keadaan yang tersebar dalam daerah seluas ΔA ditempelkan ke lintasan kuantisasi. Berapa degenerasi keadaan tersebut?

Misalkan kita memiliki sebuah silinder berongga dengan panjang Δp_z . Sisi dalam silinder dibatasi oleh orbital dengan bilangan kuantum j dan sisi luarnya dibatasi oleh orbital dengan bilangan kuantum $j+1$. Menurut persamaan (5.108) luas alas silinder adalah $\Delta A = 2\pi eB\hbar/c$. Volum silinder dalam ruang momentum adalah

$$\Delta V_p = \Delta A \Delta p_z = \frac{2\pi eB\hbar}{c} \Delta p_z \tag{5.109}$$

Volum silinder dalam ruang fasa tiga dimensi adalah perkalian antara volume dalam ruang momentum dengan volume spasial yaitu

$$\Delta \Gamma_p = V \Delta V_p = \frac{2\pi eB\hbar V}{c} \Delta p_z \tag{5.110}$$

Volum terkecil ruang fasa tiga dimensi adalah h^3 . Jumlah keadaan di dalam silinder

di atas adalah

$$G = \frac{\Delta\Gamma_p}{h^3} = \frac{2\pi e B \hbar V}{ch^3} \Delta p_z \quad (5.111)$$

Ukuran terkecil ruang fasa dalam arah sumbu momentum p_z adalah h . Volume ruang fasa dalam arah sumbu z saja sama dengan perkalian panjang momentum dalam arah sumbu z dan panjang spasial dalam sumbu z . Panjang momentum dalam arah sumbu z adalah Δp_z . Jika dianggap ukuran assembly dalam arah x , y , dan z sama maka terpenuhi $V = L^3$. Oleh karena itu panjang spasial dalam arah sumbu z adalah $L = V^{1/3}$. Akhirnya, volum ruang fasa dalam arah sumbu z adalah $\Delta p_z V^{1/3}$. Kerapatan keadaan ruang fasa diukur dalam arah sumbu z saja menjadi $G' = V^{1/3} \Delta p_z / h$. Dari sini kita dapatkan bahwa kerapatan keadaan ruang fasa dalam bidang (x,y) adalah

g = kerapatan ruang fasa dalam ruang (x,y,z) dibagi kerapatan ruang fasa dalam ruang z saja

atau

$$g = \frac{G}{G'} = \frac{2\pi e B \hbar V \Delta p_z / ch^3}{V^{1/3} \Delta p_z / h} = \frac{2\pi e B \hbar V^{2/3}}{ch^2} \quad (5.112)$$

Tiap titik dalam ruang fasa mewakili satu keadaan dan semua keadaan tersebut memiliki energi yang sama. Ini berarti, keberadaan medan magnetik menyebabkan degenerasi g keadaan energi. Dengan adanya degenerasi tersebut, energi elektron dapat ditulis dalam bentuk umum

$$\varepsilon(p_z, j, \alpha) = \varepsilon_\lambda = \frac{eB\hbar}{mc} (j + 1/2) + \frac{p_z^2}{2m} \quad (5.113)$$

dengan $\lambda = \{p_z, j, \alpha\}$, $j = 0, 1, 2, \dots$, dan $\alpha = 1, 2, 3, \dots, g$. Dalam persamaan (5.113) kita perkenalkan indeks α untuk memperhitungkan degenerasi energi electron pada orbital-orbital.

Fungsi grand partisi fermion adalah

$$Z_G = \prod_{\lambda} (1 + ze^{\beta \epsilon_{\lambda}})$$

atau

$$\begin{aligned} \ln Z_G &= \ln \prod_{\lambda} (1 + ze^{\beta \epsilon_{\lambda}}) = \sum_{\lambda} \ln(1 + ze^{\beta \epsilon_{\lambda}}) \\ &= \sum_{\alpha=1}^g \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{p_z} \ln(1 + ze^{\beta \epsilon[p_z, j, \alpha]}) \end{aligned} \quad (5.114)$$

Seperti sudah disebutkan di atas, untuk semua nilai α besarnya energi elektron sama. Dengan demikian penjumlahan terhadap indeks α pada persamaan (5.114) dapat diganti dengan perkalian tiap suku dengan bilangan degenerasi g . Jadi kita dapatkan

$$\ln Z_G = g \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{p_z} \ln(1 + ze^{\beta \epsilon[p_z, j]}) \quad (5.115)$$

Untuk menyelesaikan (5.115) kita ganti pejumlahan terhadap p_z dengan integral dengan terlebih dahulu melakukan transformasi berikut ini

$\sum_{p_z} (\dots) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} (\dots) \frac{V^{1/3}}{h} dp_z$. Dengan demikian persamaan (5.115) menjadi

$$\ln Z_G = \frac{gV^{1/3}}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \ln(1 + ze^{\beta \epsilon[p_z, j]}) dp_z \quad (5.116)$$

Dari persamaan (5.116) kita dapat mencari jumlah rata-rata elektron dalam assembli

sebagai berikut

$$N = z \frac{\partial}{\partial z} \ln Z_G = \frac{gV^{1/3}}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{z^{-1} e^{-\beta \epsilon [p_z, j]} + 1} dp_z \quad (5.117)$$

Sekarang kita akan mengecek apa persyaratan yang harus dipenuhi oleh z . Pada suhu yang sangat tinggi, yaitu $T \rightarrow \infty$ maka $e^{-\beta \epsilon} = e^{\epsilon/kT} \rightarrow 1$. Dengan demikian

$$N \rightarrow \frac{gV^{1/3}}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{z^{-1} + 1} dp_z \quad (5.118)$$

Agar hasil penjumlahan (5.118) tidak tak berhingga (karena N harus berhingga) maka haruslah z^{-1} jauh lebih besar daripada satu. Ini berarti nilai z harus jauh lebih kecil daripada satu. Karena nilai z jauh lebih kecil daripada satu maka kita dapat mengaproksimasi

$$\ln(1 + ze^{\beta \epsilon [p_z, j]}) \approx ze^{\beta \epsilon [p_z, j]}$$

Dengan demikian kembali ke persamaan (5.116) yang dapat diaproksimasi sebagai

$$\begin{aligned} \ln Z_G &\approx \frac{gV^{1/3}}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} ze^{\beta \epsilon [p_z, j]} dp_z \\ &\approx \frac{zgV^{1/3}}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \exp \left[\beta \left(\frac{p_z^2}{2m} + \frac{e\hbar B}{mc} (j+1/2) \right) \right] dp_z \\ &= \frac{zgV^{1/3}}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(\frac{\beta p_z^2}{2m} \right) dp_z \sum_{j=0}^{\infty} \exp \left[\left(\frac{\beta e\hbar B}{mc} (j+1/2) \right) \right] \\ &= \frac{zgV^{1/3}}{h} \sqrt{\frac{\pi m}{-\beta}} \times \exp \left(\frac{\beta e\hbar B}{2mc} \right) \times \sum_{j=0}^{\infty} \exp \left[j \frac{\beta e\hbar B}{mc} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{zgV^{1/3}}{h} \sqrt{\frac{\pi m}{-\beta}} \times \exp\left(\frac{\beta \hbar B}{2mc}\right) \times \frac{1}{1 - \exp\left[\frac{\beta \hbar B}{mc}\right]} \\
&= \frac{zgV^{1/3}}{h} \sqrt{\frac{\pi m}{-\beta}} \times \frac{1}{\exp\left[-\frac{\beta \hbar B}{2mc}\right] - \exp\left[\frac{\beta \hbar B}{2mc}\right]} \\
&= \frac{zgV^{1/3}}{h} \sqrt{\frac{\pi m}{-\beta}} \times \frac{1}{\exp[x] - \exp[-x]} \tag{5.119}
\end{aligned}$$

dengan

$$x = -\frac{\beta \hbar B}{2mc} \tag{5.120}$$

Dalam kondisi di mana medan magnet yang diterapkan cukup lemah diperoleh $x \ll 1$ sehingga

$$\begin{aligned}
e^x &\approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \\
e^{-x} &\approx 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \\
e^x - e^{-x} &\approx \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) \\
&= 2x + \frac{x^3}{3} = 2x \left(1 + \frac{x^2}{6}\right)
\end{aligned}$$

Dengan demikian, aproksimasi untuk fungsi partisi menjadi

$$\ln Z_G \approx \frac{zgV^{1/3}}{h} \sqrt{\frac{\pi m}{-\beta}} \times \frac{1}{2x(1 + x^2/6)}$$

$$\approx \frac{zgV^{1/3}}{h} \sqrt{\frac{\pi m}{-\beta}} \times \frac{(1-x^2/6)}{2x}$$

$$\approx \frac{z(V^{2/3}eB/2\pi\hbar c)V^{1/3}}{h} \sqrt{\frac{\pi m}{-\beta}} \times \frac{(1-x^2/6)}{2x}$$

Persamaan di atas dapat ditulis ulang sebagai

$$\frac{1}{V} \ln Z_G \approx \frac{zeB}{ch^2} \sqrt{\frac{\pi m}{-\beta}} \times \frac{(1-x^2/6)}{2x}$$

$$= \frac{z}{2\sqrt{2}} \left(\frac{2\pi m}{h^2(-\beta)} \frac{1}{h} \sqrt{\frac{2\pi m}{(-\beta)}} \right) \left[1 - \frac{1}{6} \left(\frac{e\hbar}{2mc} \right)^2 \left(\frac{B}{kT} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{z}{2\sqrt{2}\lambda^3} \left[1 - \frac{1}{6} \left(\frac{e\hbar}{2mc} \right)^2 \left(\frac{B}{kT} \right)^2 \right] \quad (5.121)$$

Suseptibilitas magnetik akhirnya menjadi

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial B} = kT \frac{\partial^2}{\partial B^2} \frac{1}{V} \ln Z_G$$

$$= -\frac{z}{6\sqrt{2}\lambda^3 kT} \left(\frac{e\hbar}{2mc} \right)^2 \quad (5.122)$$

Tampak jelas bahwa susseptibilitas magnetik bernilai negatif yang menunjukkan fenomena diamagnetik.

5.6 Efek de Hass-Van Alphen

Sekarang kita tinjau kelakuan gas fermi ideal pada suhu mendekati nol mutlak. Salah satu fenomena yang menarik adalah efek de Hass-Van Alphen. Pada bagian ini kita turunkan persamaan yang menjelaskan efek tersebut.

Kita mulai dengan menulis energi assembli pada suhu nol mutlak yaitu

$$E_o = -\mu B = -MVB \quad (5.123)$$

Berdasarkan bentuk energi tersebut, kita dapat menulis magnetisasi sebagai

$$M = -\frac{1}{V} \frac{\partial E_o}{\partial B}$$

Kemudian susceptibilitas magnetik memenuhi persamaan

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial B} = -\frac{1}{V} \frac{\partial^2 E_o}{\partial B^2} \quad (5.124)$$

Dengan keberadaan medan magnetik searah sumbu z maka elektron akan bergerak secara bebas dalam arah sumbu z dan gerakannya terkuantisasi dalam bidang x dan y . Sekarang kita melihat kasus khusus di mana gerakan dalam arah sumbu z tidak ada. Elektron hanya bergerak dalam bidang x dan y , yaitu tegak lurus medan magnetik. Tingkat-tingkat energi elektron menjadi terkuantisasi dan memenuhi persamaan

$$\varepsilon_j = \frac{e\hbar B}{mc} (j + 1/2) \quad (5.125)$$

Dari persamaan di atas maka tingkat energi terendah yang dimiliki elektron adalah $\varepsilon_0 = e\hbar B/2mc$.

Karena hanya berada dalam bidang x dan y maka tiap tingkat energi

memiliki degenerasi

$$g = \frac{V^{2/3} eB}{2\pi \hbar c} = \frac{L^2 eB}{2\pi \hbar c} \quad (5.126)$$

dengan asumsi bahwa assembli berbentuk kubus dengan sisi L sehingga $V = L^3$.

Karena suhu assembli adalah nol mutlak maka energi assembli E_0 sama dengan jumlah ε_i pada semua N keadaan terendah. Karena degenerasi g bergantung pada medan magnet B maka tingkat energi tertinggi yang ditempati elektron juga akan bergantung pada B .

- a) Jika $g \geq N$ maka semua elektron hanya menempati satu tingkat energi terendah. Tidak ada elektron yang menempati tingkat energi kedua, ketiga, dan seterusnya. Dalam kondisi ini, energi total yang dimiliki elektron hanyalah

$$E_o = N \times \frac{1}{2} \frac{e\hbar B}{mc} \quad (5.127)$$

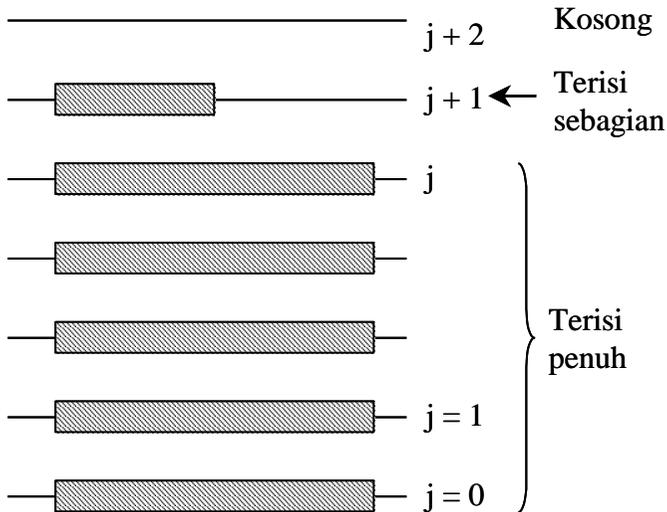
- b) Jika B cukup kecil sehingga $g \leq N$ maka elektron akan menempati sejumlah tingkat energi. Tingkat energi terendah terisi g elektron dan sisanya elektron akan menempati tingkat energi berikutnya. Sampai tingkat energi berapa yang ditempati elektron akan sangat bergantung pada nilai B .

Untuk menentukan ungkapan umum energi E_0 sebagai fungsi B , perhatikan ilustrasi tingkat-tingkat energi pada **Gambar 5.7**. Setiap tingkat energi menampung g elektron. Tingkat energi dengan $j = 0$ berisi penuh g elektron. Misalkan sampai tingkat energi ke- j telah penuh ditempati elektron. Berarti ada sebanyak $(j+1)$ buah tingkat energi yang masing-masing berisi g elektron (dari indeks 0 sampai indeks j). Jumlah elektron tersebut yang menempati tingkat energi penuh tersebut adalah $(j+1)g$.

Sisa elektron sebanyak $N - (j+1)g$ akan mengisi tingkat energi ke- $(j+1)$ dan tidak penuh, yaitu jumlahnya kurang dari g . Dengan demikian $N > (j+1)g$. Jika sampai tingkat energi ke $(j+1)$ terisi penuh maka jumlah elektron harusnya $(j+2)g$.

Tetapi karena tingkat energi ini tidak penuh maka jumlah elektron kurang dari itu, atau $N < (j+2)g$. Dengan demikian kita dapatkan ketidaksamaan

$$(j+1)g < N < (j+2)g$$



Gambar 5.7 Ilustrasi tingkat-tingkat energi yang ditempati elektron yang terisi penuh dan terisi sebagian. Tingkat energi terakhir terisi sebagian.

Masukkan ungkapan untuk g pada persamaan (5.126) sehingga diperoleh

$$(j+1) \left(\frac{L^2 eB}{2\pi \hbar c} \right) < N < (j+2) \left(\frac{L^2 eB}{2\pi \hbar c} \right)$$

$$(j+1) < N \left(\frac{2\pi \hbar c}{L^2 eB} \right) < (j+2)$$

Ketidaksamaan di atas dapat ditulis ulang sebagai berikut

$$\frac{1}{j+1} > \left(\frac{L^2}{2\pi N} \frac{eB}{\hbar c} \right) > \frac{1}{j+2}$$

$$\frac{1}{j+1} > \frac{B}{2\pi\hbar c N / eL^2} > \frac{1}{j+2}$$

$$\frac{1}{j+1} > \frac{B}{B_o} > \frac{1}{j+2} \quad (5.129)$$

dengan

$$B_o = \frac{2\pi\hbar c N}{eL^2} \quad (5.130)$$

Dengan mengingat sampai tingkat energi ke- j telah penuh berisi elektron dan energi ke- $(j+1)$ hanya tersisi sebagian maka energi keadaan dasar yang dimiliki assembla dengan kehadiran medan magnet menjadi

$$\begin{aligned} E_o &= g \sum_{i=0}^j \varepsilon_i + [N - g(j+1)] \varepsilon_{j+1} \\ &= g \sum_{i=0}^j \frac{e\hbar B}{mc} (i+1/2) + [N - g(j+1)] \frac{e\hbar B}{mc} (j+3/2) \\ &= \frac{e\hbar B}{mc} \left\{ g \left[\frac{1}{2} j(j+1) + \frac{1}{2} (j+1) \right] + [N - (j+1)g] (j+3/2) \right\} \\ &= NB_o \frac{e\hbar}{mc} \frac{B}{B_o} \left\{ (j+3/2) - \frac{1}{2} (j+1)(j+2) \frac{B}{B_o} \right\} \end{aligned} \quad (5.131)$$

Akhirnya kita dapatkan ungkapan umum energi keadaan dasar pada berbagai medan

magnetik, yaitu

$$\frac{1}{N} E_o = \begin{cases} \frac{e\hbar}{2mc} B_o x & , x > 1 \\ \frac{e\hbar B_o}{mc} x \left\{ (j+3/2) - \frac{1}{2} (j+1)(j+2)x \right\} & , \frac{1}{j+2} < x < \frac{1}{j+1} \end{cases} \quad (5.132)$$

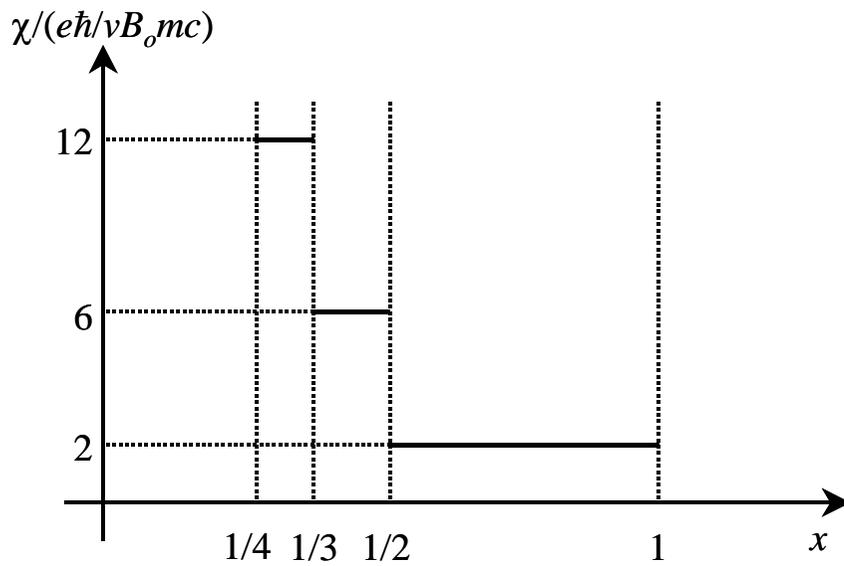
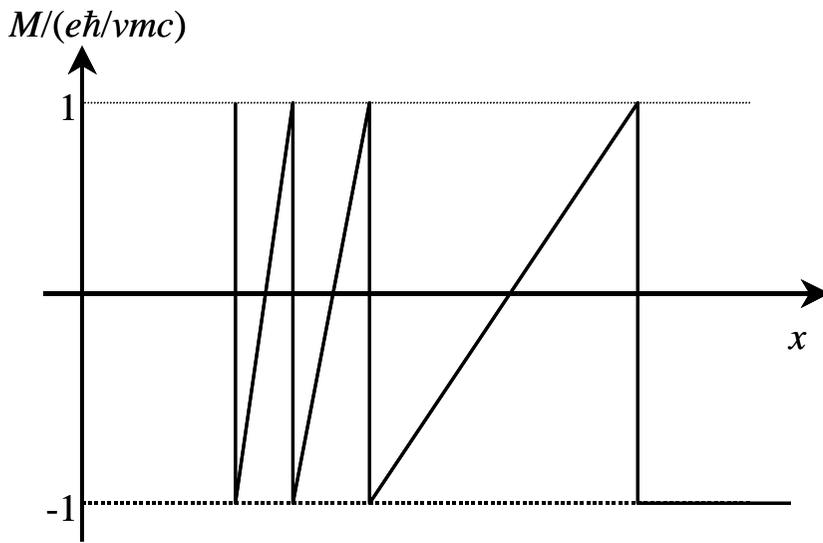
dengan $x = B/B_o$.

Magnetisasi dan suseptibilitas menjadi

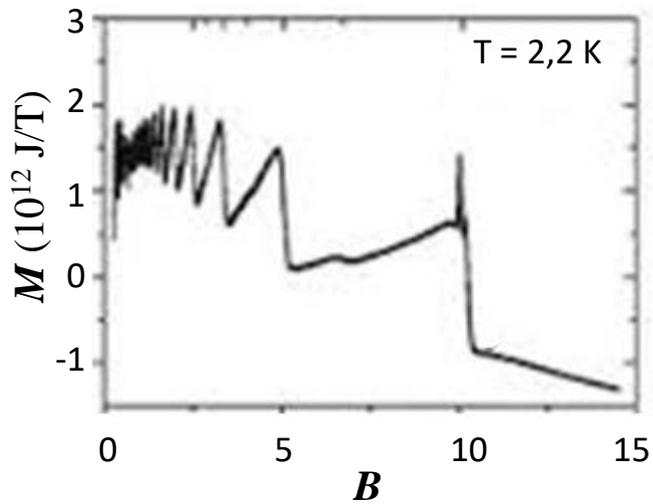
$$M = \begin{cases} -\frac{1}{v} \frac{e\hbar}{2mc} & , x > 1 \\ \frac{1}{v} \frac{e\hbar}{mc} \{ 2(j+1)(j+2)x - (2j+3) \} & , \frac{1}{j+2} < x < \frac{1}{j+1} \end{cases} \quad (5.133)$$

$$\chi = \begin{cases} 0 & , x > 1 \\ \frac{1}{v B_o} \frac{e\hbar}{mc} (j+1)(j+2) & , \frac{1}{j+2} < x < \frac{1}{j+1} \end{cases} \quad (5.134)$$

Plot magnetisasi dan susseptibilitas sebagai fungsi $x = B/B_o$ tampak pada **Gambar 5.8**. **Gambar 5.9** adalah contoh hasil pengamatan magnetisasi bahan sebagai fungsi kuat medan magnetik. Pengamatan dilakukan pada suhu 2,2 K. Tampak muncul pola magnetisasi yang serupa dengan ramalan teori yang ditunjukkan pada **Gambar 5.9**. Ini menunjukkan teramatinya efek de Haas van Alphen pada bahan tersebut.



Gambar 5.8 Plot magnetisasi dan susseptibilitas sebagai fungsi medan magnet luar



Gambar 5.9 Magnetisasi bahan yang diamati pada suhu 2,2 K. Teramati kemunculan efek de Hass van Alphen (e10.ph.tum.de).

5.7 Paramagnetisme Pauli

Kita sudah membahas tentang diamagnetisme Landau yang dapat dijelaskan dengan menggunakan konsep kuantum di mana elektron bergerak dalam orbit-orbit yang terkuntisasi. Sekarang kita membahas fenomena paramagnetisme yang muncul akibat sumbangan spin elektron.

Hamiltonian elektron bebas yang berada dalam medan magnetik dapat ditulis

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - \vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (5.135)$$

Dengan $\vec{\mu}$ adalah operator magnetik intrinsik elektron yang memenuhi

$$\vec{\mu} = \mu \vec{\sigma} \quad (5.136)$$

$$\mu = \frac{e\hbar}{2mc} \quad (5.137)$$

dan $\vec{\sigma}$ adalah matriks Pauli (operator spin).

Feromagnetisme muncul dari suku kedua dalam hamiltonian. Kita fokuskan perhatian pada efek yang dihasilkan bagian tersebut. Hamiltonian kita sederhanakan menjadi

$$H = \frac{p^2}{2m} - \vec{\mu} \cdot \vec{B} = \frac{p^2}{2m} - \mu \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \quad (5.138)$$

Fungsi eigen dari $\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$ adalah sB dengan $s = \pm 1$. Dengan demikian tingkat energi elektron tunggal yang merupakan solusi eigen hamiltonian di atas adalah

$$\varepsilon(p, s) = \frac{p^2}{2m} - s\mu B \quad (5.139)$$

Energi assembli menjadi

$$\begin{aligned} E &= \sum_p \sum_s n_{p,s} \varepsilon(p, s) \\ &= \sum_p \sum_s n_{p,s} \left(\frac{p^2}{2m} - s\mu B \right) \\ &= \sum_p n_{p,+1} \left(\frac{p^2}{2m} - \mu B \right) + \sum_p n_{p,-1} \left(\frac{p^2}{2m} + \mu B \right) \end{aligned} \quad (5.140)$$

di mana $n_{p,s}$ adalah jumlah fermion yang memiliki momentum p dan spin s . Karena memenuhi prinsip eksklusi Pauli maka harga yang boleh dimiliki oleh $n_{p,s}$ adalah 0 atau 1 dan

$$\sum_p \sum_s n_{p,s} = N$$

Sekarang kita menulis dengan simbol lebih singkat lagi

$$n_{p,+1} = n_p^+$$

$$n_{p,-1} = n_p^-$$

$$\sum_p n_{p,+1} = N^+$$

$$\sum_p n_{p,-1} = N^- = N - N^+$$

Dengan notasi di atas maka energi total dapat ditulis

$$E = \sum_p (n_p^+ + n_p^-) \frac{p^2}{2m} - \mu B(N^+ - N^-) \quad (5.141)$$

Selanjutnya, fungsi partisi menjadi

$$Z_N = \sum_{\{n_p^+, n_p^-\}} \exp \left[\beta \sum_p (n_p^+ + n_p^-) \frac{p^2}{2m} - \beta \mu B(N^+ - N^-) \right] \quad (5.142)$$

Untuk melakukan penjumlahan fungsi partisi di atas kita gunakan langkah berikut ini.

- a) Kita pilih N^+ tertentu
- b) Lakukan penjumlahan terhadap semua $\{n_p^+\}$ dan $\{n_p^-\}$ yang memenuhi

$$\sum_p n_p^+ = N^+ \quad \text{dan} \quad \sum_p n_p^- = N - N^+$$

- c) Lakukan penjumlahan terhadap N^+ dari 0 sampai N

Dengan urutan penjumlahan ini kita dapat menulis fungsi partisi menjadi

$$\begin{aligned}
Z_N &= \sum_{N^+=0}^N \exp[-\beta\mu B(N^+ - N^-)] \sum_{\{n_p^+\}} \exp\left[\beta \sum_p n_p^+ \frac{p^2}{2m}\right] \sum_{\{n_p^-\}} \exp\left[\beta \sum_p n_p^- \frac{p^2}{2m}\right] \\
&= \sum_{N^+=0}^N \exp[-\beta\mu B(2N^+ - N)] \sum_{\{n_p^+\}} \exp\left[\beta \sum_p n_p^+ \frac{p^2}{2m}\right] \sum_{\{n_p^-\}} \exp\left[\beta \sum_p n_p^- \frac{p^2}{2m}\right] \quad (5.143)
\end{aligned}$$

Misalkan $Z_N(0)$ adalah fungsi partisi N fermion yang tidak memiliki spin di mana massa tiap sistem adalah m . Kita dapat menulis

$$Z_N(0) = \sum_{\sum n_p = N} \exp\left[\beta \sum_p n_p \frac{p^2}{2m}\right] = \exp[\beta F(N)] \quad (5.144)$$

di mana $F(N)$ adalah ebergi bebas Helmholtz assembli yang memiliki N sistem (lihat persamaan (2.15)). Dengan demikian fungsi partisi akibat kehadiran medan dapat ditulis

$$Z_N = \exp[\beta\mu BN] \sum_{N^+=0}^N \exp[-2\beta\mu BN^+] Z_{N^+}(0) Z_{N-N^+}(0),$$

atau

$$\frac{1}{N} \ln Z_N = \beta\mu B + \frac{1}{N} \ln \sum_{N^+=0}^N \exp[-2\beta\mu BN^+ + \beta F(N_+) + \beta F(N - N_+)] \quad (5.145)$$

Dalam penjumlahan di atas akan ada suku-suku yang memberi kontribusi terbesar. Nilai total penjumlahan kira-kira sama dengan nilai suku dengan kontribusi terbesar tersebut. Suku-suku lainnya dapat diabaikan. Ini berarti nilai satu suku yang memberi kontribusi terbesar jauh lebih besar daripada jumlah nilai suku-suku lainnya. Misalkan suku yang memberikan kontribusi terbesar adalah $N^+ = \bar{N}^+$ maka

$$\frac{1}{N} \ln Z_N \approx \beta\mu B + \frac{1}{N} \ln \exp[-2\beta\mu B\bar{N}^+ + \beta F(\bar{N}_+) + \beta F(N - \bar{N}_+)]$$

$$\approx \beta\mu B + \frac{-2\beta\mu B\bar{N}^+ + \beta F(\bar{N}_+) + \beta F(N - \bar{N}_+)}{N} \quad (5.146)$$

Agar \bar{N}^+ merupakan nilai yang memberi kontribusi terbesar maka diferensial persamaan (5.146) harus nol, atau

$$\frac{\partial}{\partial \bar{N}^+} \frac{-2\beta\mu B\bar{N}^+ + \beta F(\bar{N}_+) + \beta F(N - \bar{N}_+)}{N} = 0$$

$$-2\beta\mu B + \beta \frac{\partial F(\bar{N}_+)}{\partial \bar{N}^+} + \beta \frac{\partial F(N - \bar{N}_+)}{\partial \bar{N}^+} = 0$$

Dengan menggunakan sifat $\partial / \partial x = -\partial / \partial (Y - x)$ maka persamaan di atas dapat ditulis ulang menjadi

$$-2\mu B + \frac{\partial F(\bar{N}_+)}{\partial \bar{N}^+} - \frac{\partial F(N - \bar{N}_+)}{\partial (N - \bar{N}^+)} = 0$$

atau

$$\frac{\partial F(\bar{N}_+)}{\partial \bar{N}^+} - \frac{\partial F(N - \bar{N}_+)}{\partial (N - \bar{N}^+)} = 2\mu B \quad (5.148)$$

Pada assembli elektron yang berada pada suhu mendekati 0 K maka elektron-elektron menempati tingkat energi paling rendah hingga tingkat energi fermi. Jumlah elektron dengan spin up sama dengan elektron dengan spin down atau paling jauh berbeda satu elektron. Tiap tingkat energi diisi oleh dua elektron dengan arah spin berlawanan. Ketika pada assembli tersebut diberikan medan magnet maka yang pertama kali terpengaruh oleh medan magnet adalah elektron di sekitar tingkat energi fermi. Medan magnet menyebabkan elektron dengan spin up mengalami kenaikan energi sebesar μB dan elektron dengan spin down mengalami penurunan energi sebesar μB juga. Dengan demikian, selisih energi elektron yang mengalami spin up dan spin down adalah $2\mu B$.

Sebelum dikenakan medan magnet, energi elektron yang memiliki spin up dan

down sama besar, yaitu sama dengan energi fermi. Setelah dikenakan medan magnet, energi elektron yang memiliki spin up menjadi $\varepsilon_F(\bar{N}^+)$ dan energi elektron yang memiliki spin down menjadi $\varepsilon_F(N - \bar{N}^+)$. Karena selisih energi elektron yang memiliki spin up dan down adalah $2\mu B$ maka kita dapatkan

$$\varepsilon_F(\bar{N}^+) - \varepsilon_F(N - \bar{N}^+) = 2\mu B \quad (5.149)$$

Jika kita bandingkan persamaan (5.148) dan (5.149) maka kita simpulkan bahwa

$$\varepsilon_F(N) = \frac{\partial F(N)}{\partial N} \quad (5.150)$$

Secara umum energi fermi bergantung pada suhu. Pada suhu 0 K, energi fermi N sistem adalah

$$\varepsilon_F(N,0) = \left(\frac{3\pi^2 N^{2/3}}{V} \right) \frac{\hbar^2}{2m} \quad (5.151)$$

Pada suhu T yang memenuhi $kT \ll \varepsilon_F(N)$, bentuk aproksimasi untuk energy Fermi adalah (lihat Mikrajuddin, *Fisika Statistik*, CV Rezeki Putra (2009))

$$\varepsilon_F(N,T) = \varepsilon_F(N,0) \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\varepsilon_F(N,0)} \right)^2 \right] \quad (5.152)$$

Berdasarkan persamaan (5.151) dan (5.152) kita dapat menulis kebergantungan energi fermi pada jumlah sistem sebagai berikut

$$\varepsilon_F(N,0) = \alpha N^{2/3} \quad (5.153a)$$

$$\varepsilon_F(N,T) = \alpha N^{2/3} \left(1 - \frac{\tau(T)}{N^{4/3}} \right) \quad (5.153b)$$

dengan $\alpha = 3\pi^2\hbar^2/2mV$ dan $\tau(T) = \pi^2k^2T^2/12\alpha^2$. Persamaan (5.149) dan (5.153) akan kita gunakan untuk menentukan suseptibilitas magnetik bahan. Suseptibilitas ini ditentukan oleh elektron yang berada di sekitar tingkat energi fermi.

Suseptibilitas Fungsi Suhu

Karena energi fermi bergantung pada suhu maka sangat logis kita prediksi bahwa suseptibilitas yang dihasilkan juga bergantung pada suhu. Untuk mempermudah kita akan melakukan perhitungan secara terpisah pada rentang suhu yang berbeda-beda. Hal ini dilakukan karena energi fermi memiliki bentuk asimptot yang berbeda pada rentang suhu yang berbeda. Penggunaan bentuk asimptot tersebut akan memudahkan kita melakukan perhitungan. Ada tiga daerah suhu tempat kita melakukan perhitungan suseptibilitas, yaitu daerah suhu mendekati 0 K, rentang suhu $0 \text{ K} < T < \varepsilon_F/k$ dan rentang suhu $T > \varepsilon_F/k$.

Suseptibilitas pada Suhu $\rightarrow 0 \text{ K}$.

Pada rentang suhu ini energi fermi diaproksimasi oleh $\varepsilon_F(N,0) = \alpha N^{2/3}$.

Dengan demikian, persamaan (5.149) dapat ditulis menjadi

$$\alpha(\bar{N}^+)^{2/3} - \alpha(N - \bar{N}^+)^{2/3} = 2\mu_B$$

$$\alpha N^{2/3} \left[\left(\frac{\bar{N}^+}{N} \right)^{2/3} - \left(1 - \frac{\bar{N}^+}{N} \right)^{2/3} \right] = 2\mu_B$$

$$\varepsilon_F(N,0) \left[\left(\frac{\bar{N}^+}{N} \right)^{2/3} - \left(1 - \frac{\bar{N}^+}{N} \right)^{2/3} \right] = 2\mu_B \quad (5.154)$$

Untuk mempermudah, kita definisikan parameter berikut $r = 2(\bar{N}^+ / N) - 1$. Dengan parameter ini maka kita dapat menulis

$$\frac{\bar{N}^+}{N} = \left(\frac{\bar{N}^+}{N} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{2\bar{N}^+}{N} - 1 \right) + \frac{1}{2} = \frac{1+r}{2} \quad (5.155a)$$

$$1 - \frac{\bar{N}^+}{N} = \frac{1}{2} - \left(\frac{\bar{N}^+}{N} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{2\bar{N}^+}{N} - 1 \right) = \frac{1-r}{2} \quad (5.155b)$$

Substitusi persamaan (1.55) ke dalam persamaan (1.54) diperoleh

$$\varepsilon_F(N,0) \left[\left(\frac{1+r}{2} \right)^{2/3} - \left(\frac{1-r}{2} \right)^{2/3} \right] = 2\mu B$$

$$\frac{\varepsilon_F(N,0)}{2^{3/2}} \left[(1+r)^{2/3} - (1-r)^{2/3} \right] = 2\mu B$$

$$(1+r)^{2/3} - (1-r)^{2/3} = \frac{2^{5/2} \mu B}{\varepsilon_F(N,0)} \quad (5.156)$$

Pada kondisi medan magnet cukup kecil sehingga $\mu B / \varepsilon_F(N,0) \ll 1$ maka suku di ruas kanan persamaan (5.156) menuju nol. Suku di ruas kanan nol hanya terjadi jika pada suku di ruas kiri terpenuhi $r \rightarrow 0$. Dengan kondisi $r \rightarrow 0$ maka kita dapat melakukan pendekatan binomial pada suku di ruas kiri dan persamaan (5.156) menjadi

$$\left(1 + \frac{2}{3}r \right) - \left(1 - \frac{2}{3}r \right) = \frac{2^{5/2} \mu B}{\varepsilon_F(N,0)}$$

$$\frac{4}{3}r = \frac{2^{5/2} \mu B}{\varepsilon_F(N,0)}$$

atau

$$r = \frac{3\sqrt{2} \mu B}{\varepsilon_F(N,0)} \quad (5.157)$$

Momen magnetik total ditentukan oleh selisih elektron yang memiliki spin up dan spin down. Dengan mengacu pada persamaan (5.155) jelas bahwa selisih tersebut bergantung pada parameter r . Dengan mudah dapat kita hitung bahwa jumlah spin up adalah

$$\Delta N = \bar{N}^+ - (N - \bar{N}^+) = 2\bar{N}^+ - N = N \left(\frac{2\bar{N}^+}{N} - 1 \right) = Nr \quad (5.158)$$

Dengan demikian momen magnetik total assembli adalah

$$\mu_{tot} = \Delta N \mu = Nr \mu = \frac{3\sqrt{2}N\mu^2 B}{\varepsilon_F(N,0)} \quad (5.159)$$

Magnetisasi didefinisikan sebagai momen magnetik total per satuan volum. Dengan menggunakan persamaan (5.159) kita dapat menghitung magnetisasi sebagai berikut

$$M = \frac{\mu_{tot}}{V} = \frac{3\sqrt{2}N\mu^2 B}{\varepsilon_F(N,0)V} = \frac{3\sqrt{2}\mu^2 B}{\varepsilon_F(N,0)(V/N)} = \frac{3\sqrt{2}\mu^2 B}{\varepsilon_F(N,0)v} \quad (5.160)$$

di mana $v = V/N$, yaitu volum per sistem. Akhirnya, dari magnetisasi total kita dengan mudah menghitung susceptibilitas magnetik sebagai berikut

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial B} = \frac{3\sqrt{2}\mu^2}{\varepsilon_F(N,0)v} \quad (5.161)$$

Tampak dari persamaan (5.160) bahwa susceptibilitas memiliki tanda positif. Ini menunjukkan bahwa assembli bersifat paramagnetik.

Susseptibilitas pada Suhu $0 K < T < \varepsilon_F/k$

Selanjutnya kita tinjau kondisi pada rentang suhu yang jauh lebih kecil

daripada suhu Fermi. Pada suhu tersebut, energi fermi dapat didekati dengan persamaan (5.153b). Dengan demikian, hubungan pada persamaan (5.149) dapat ditulis menjadi

$$\alpha(\bar{N}^+)^{2/3} \left(1 - \frac{\tau(T)}{(\bar{N}^+)^{4/3}} \right) - \alpha(N - \bar{N}^+)^{2/3} \left(1 - \frac{\tau(T)}{(N - \bar{N}^+)^{4/3}} \right) \approx 2\mu B$$

$$\alpha N^{2/3} \left(\frac{\bar{N}^+}{N} \right)^{3/2} \left(1 - \frac{\tau(T)/N^{4/3}}{(\bar{N}^+/N)^{4/3}} \right) - \alpha N^{2/3} \left(1 - \frac{\bar{N}^+}{N} \right)^{2/3} \left(1 - \frac{\tau(T)/N^{4/3}}{(1 - \bar{N}^+/N)^{4/3}} \right) \approx 2\mu B$$

$$\alpha N^{2/3} \left(\frac{1+r}{2} \right)^{2/3} \left(1 - \frac{\tau(T)/N^{4/3}}{((1+r)/2)^{4/3}} \right) - \alpha N^{2/3} \left(\frac{1-r}{2} \right)^{2/3} \left(1 - \frac{\tau(T)/N^{4/3}}{((1-r)/2)^{4/3}} \right) \approx 2\mu B$$

$$(1+r)^{2/3} \left(1 - \frac{2^{4/3} \tau(T)/N^{4/3}}{(1+r)^{4/3}} \right) - (1-r)^{2/3} \left(1 - \frac{2^{4/3} \tau(T)/N^{4/3}}{(1-r)^{4/3}} \right) \approx \frac{2^{5/2} \mu B}{\varepsilon_F(N,0)}$$

$$(1+r)^{2/3} - (1-r)^{2/3} + \frac{2^{4/3} \tau(T)}{N^{4/3}} \left(\frac{1}{(1-r)^{2/3}} - \frac{1}{(1+r)^{2/3}} \right) \approx \frac{2^{5/2} \mu B}{\varepsilon_F(N,0)} \quad (5.162)$$

Kita masih menggunakan aproksimasi binomial untuk menyederhanakan suku $(1+r)^{2/3}$ dan $(1-r)^{2/3}$ sehingga diperoleh

$$\left(1 + \frac{2}{3}r \right) - \left(1 - \frac{2}{3}r \right) + \frac{2^{4/3} \tau(T)}{N^{4/3}} \left(\left(1 + \frac{2}{3}r \right) - \left(1 - \frac{2}{3}r \right) \right) \approx \frac{2^{5/2} \mu B}{\varepsilon_F(N,0)}$$

$$\frac{4}{3}r + \frac{2^{4/3} \tau(T)}{N^{4/3}} \left(\frac{4}{3}r \right) \approx \frac{2^{5/2} \mu B}{\varepsilon_F(N,0)}$$

$$\frac{4}{3}r \left(1 + \frac{2^{4/3} \tau(T)}{N^{4/3}} \right) \approx \frac{2^{5/2} \mu B}{\varepsilon_F(N,0)}$$

$$r \approx \frac{3\sqrt{2}\mu B}{\varepsilon_F(N,0)} \left(1 + \frac{2^{4/3}\tau(T)}{N^{4/3}} \right)^{-1} \quad (5.163)$$

Substitusi kembali $\tau(T)$ yang telah didefinisikan sebelumnya ke dalam persamaan (5.163) akan diperoleh

$$r \approx \frac{3\sqrt{2}\mu B}{\varepsilon_F(N,0)} \left(1 + \frac{2^{4/3}\pi^2 k^2 T^2}{12\varepsilon_F^2(N,0)} \right)^{-1} \approx \frac{3\sqrt{2}\mu B}{\varepsilon_F(N,0)} \left(1 - \frac{2^{4/3}\pi^2 k^2 T^2}{12\varepsilon_F^2(N,0)} \right) \quad (5.164)$$

Dari persamaan (5.154) kita dapatkan selisih antara jumlah spin up dan down sebagai berikut

$$\Delta N = Nr \approx \frac{3\sqrt{2}N\mu B}{\varepsilon_F(N,0)} \left(1 - \frac{2^{4/3}\pi^2 k^2 T^2}{12\varepsilon_F^2(N,0)} \right) \quad (5.165)$$

Akhirnya dari persamaan (5.165) kita dapatkan magnetisasi dan susceptibilitas magnetik sebagai berikut

$$\begin{aligned} M &= \frac{\Delta N \mu}{V} \approx \frac{3\sqrt{2}N\mu^2 B}{\varepsilon_F(N,0)V} \left(1 - \frac{2^{4/3}\pi^2 k^2 T^2}{12\varepsilon_F^2(N,0)} \right) \\ &= \frac{3\sqrt{2}\mu^2 B}{\varepsilon_F(N,0)v} \left(1 - \frac{2^{4/3}\pi^2 k^2 T^2}{12\varepsilon_F^2(N,0)} \right) \end{aligned} \quad (5.166)$$

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial B} \approx \frac{3\sqrt{2}\mu^2}{\varepsilon_F(N,0)v} \left(1 - \frac{2^{4/3}\pi^2 k^2 T^2}{12\varepsilon_F^2(N,0)} \right) \quad (5.167)$$

Di sini juga tampak bahwa susceptibilitas bernilai positif yang mengindikasikan sifat paramagnetisme. Juga tampak pada persamaan (5.167) bahwa susceptibilitas makin kecil dengan naiknya suhu. Ini adalah gejala yang umum ditemukan pada semua bahan

magnetik. Sifat magnetik makin menurun dengan naiknya suhu.

Susseptibilitas pada suhu $T \gg \varepsilon_F(N,0)/k$

Untuk kasus ini kita kembali melihat penurunan pada bagian awal dari bab ini. Kita sudah mendefinisikan $z = e^{\mu/kT} \approx e^{\varepsilon_F(N,0)/kT}$. Pada kondisi di mana $kT \gg \varepsilon_F(N,0)$ maka nilai z menjadi sangat kecil. Untuk nilai z yang kecil kita sudah dapatkan bentuk aproksimasi (persamaan (5.24a))

$$z \approx \frac{\lambda^3}{v} = \frac{\lambda^3 N}{V}$$

Dengan demikian

$$e^{\varepsilon_F(N,0)/kT} \approx \frac{\lambda^3 N}{V}$$

atau

$$\varepsilon_F(N,0) \approx kT \ln\left(\frac{\lambda^3 N}{V}\right) \quad (5.168)$$

Dari persamaan (5.168) kita mendapatkan dua persamaan berikut ini

$$\begin{aligned} \varepsilon_F(\bar{N}^+, 0) &\approx kT \ln\left(\frac{\lambda^3 \bar{N}^+}{V}\right) = kT \ln\left(\frac{\lambda^3 (\bar{N}^+ / N)}{V / N}\right) \\ &\approx kT \ln\left(\frac{\lambda^3 (1+r)/2}{v}\right) = kT \ln(1+r) + kT \ln\left(\frac{\lambda^3}{2v}\right) \end{aligned} \quad (5.169a)$$

$$\varepsilon_F(N - \bar{N}^+, 0) \approx kT \ln(1-r) + kT \ln\left(\frac{\lambda^3}{2v}\right) \quad (5.169b)$$

Dari persamaan (5.169a) dan (5.169b) kita tentukan selisihnya dan diperoleh

$$\varepsilon_F(\bar{N}^+, 0) - \varepsilon_F(N - \bar{N}^+, 0) \approx kT \ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) \quad (5.170)$$

Substitusi persamaan (5.170) ke dalam persamaan (5.149) diperoleh

$$kT \ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) \approx 2\mu B$$

$$\frac{1+r}{1-r} \approx \exp\left[\frac{2\mu B}{kT}\right] \quad (5.171)$$

Dengan demikian kita dapatkan solusi untuk r sebagai berikut

$$r = \tanh\left[\frac{\mu B}{kT}\right] \quad (5.172)$$

Dari persamaan (5.172) kita dapatkan ungkapan untuk magnetisasi sebagai berikut

$$M = \frac{Nr\mu}{V} = \frac{\mu}{v} \tanh\left[\frac{\mu B}{kT}\right] \quad (5.173)$$

Karena kita bahas kondisi suhu sangat tinggi maka $kT \gg \mu B$. Pada kondisi tersebut kita dapat mengaproksimasi $\tanh(x) \approx x$ di mana $x = \mu B/kT \ll 1$. Akibatnya, magnetisasi pada persamaan (5.173) dapat diparoksimasi menjadi

$$M \approx \frac{\mu}{v} \times \left[\frac{\mu B}{kT}\right] = \frac{\mu^2 B}{vkT} \quad (5.174)$$

Dari magnetisasi kita dapatkan suseptibilitas sebagai berikut

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial B} \approx \frac{\mu^2}{v k T} \quad (5.175)$$

Sekali lagi tampak bahwa susseptibilitas memiliki harga positif yang menunjukkan sifat paramagnetisme. Juga tampak bahwa susseptibilitas berbanding terbalik dengan suhu.

Bab 6

GAS BOSE IDEAL

Bab ini berisi diskusi tentang gas bose ideal dalam konstruksi grand kanonik serta sejumlah aplikasinya. Tujuan bab ini adalah mahasiswa memahami beberapa aplikasi ensembel grand kanonik boson. Tiga contoh yang dibahas adalah kondensasi bose-einstein, tekanan radiasi, dan sifat termal kristal. Kita akan melakukan penurunan persamaan lebih detail yang jarang ditemui di buku-buku yang sudah terbit. Kurang detail penurunan persamaan pada sejumlah buku yang ada menyebabkan materi yang disampaikan sering sulit diikuti.

Agar dapat memahami bab ini secara mudah para mahasiswa diharapkan telah memahami cukup baik materi tentang grand partisi. Review ulang tentang materi di kuliah Fisika Statistik dan termodinamika juga sangat membantu dalam menguasai materi bab ini.

6.1 Persamaan Keadaan Boson

Kita akan membahas gas bose ideal yang merupakan kumpulan boson bebas. Boson bebas artinya interaksi antar boson dapat diabaikan dibandingkan dengan energi kinetik energi internal yang dimiliki boson. Contoh gas boson ideal adalah assembli foton dan fonon. Kita mulai dari ungkapan fungsi grand partisi untuk boson, yaitu

$$Z_G = \prod_i \frac{1}{1 - ze^{-\beta \epsilon_i}} \quad (6.1)$$

Fungsi grand partisi memiliki hubungan langsung dengan perkalian tekanan dan volum, yaitu

$$\frac{PV}{kT} = \ln Z_G = -\ln \prod_i (1 - ze^{-\beta\varepsilon_i}) = -\sum_i \ln(1 - ze^{-\beta\varepsilon_i}) \quad (6.2)$$

Untuk menentukan secara eksplisit fungsi grand partisi pada persamaan (6.2) kita mengganti simbol penjumlahan dengan integral terhadap variable momentum. Untuk maksud tersebut, terlebih dahulu kita ubah ungkapan diskrit menjadi kontinu sebagai berikut

$$\varepsilon_i \rightarrow \frac{p^2}{2m}$$

$$\sum_i (\dots) \rightarrow \int (\dots) \frac{V}{h^3} 4\pi p^2 dp \quad (6.3)$$

Tetapi sebelum mengganti penjumlahan dengan integral, kita pisahkan suku yang memiliki energi nol (momentum nol) dari suku yang memiliki energi tidak nol sebagai berikut

$$\frac{PV}{kT} = -\sum_{i(\varepsilon_i \neq 0)} \ln(1 - ze^{-\beta\varepsilon_i}) - \ln(1 - z)$$

atau

$$\frac{P}{kT} = -\frac{1}{V} \sum_{i(\varepsilon_i \neq 0)} \ln(1 - ze^{-\beta\varepsilon_i}) - \frac{1}{V} \ln(1 - z) \quad (6.4)$$

Mungkin ada pertanyaan, mengapa pemisahan seperti pada persamaan (6.4) tidak dilakukan pada saat membahas fermion? Kalau kita pisahkan pada saat membahas fermion maka suku dengan energi nol adalah $\ln(1+z)/V$. Ketika $V \rightarrow \infty$ maka untuk z berhingga, nilai $(1/V) \ln(1+z) \rightarrow 0$ Oleh karena itulah suku

dengan energi nol pada fermion tidak ada gunanya untuk dipisahkan karena nilainya mendekati nol. Namun sebaliknya terjadi pada boson. Sebagai contoh, jika $z \rightarrow 1$ maka $\ln(1-z) \rightarrow -\infty$. Dengan demikian suku $-\ln(1-z)/V$ (suku kedua pada persamaan (6.4)) bisa memiliki nilai berhingga meskipun $V \rightarrow \infty$. Dengan kata lain, suku dengan energi nol pada boson tidak boleh diabaikan.

Dengan menggunakan (6.3) maka (6.4) menjadi

$$\frac{P}{kT} = -\frac{4\pi}{h^3} \int_{0^+}^{\infty} p^2 \ln(1 - ze^{-\beta p^2/2m}) dp - \frac{1}{V} \ln(1-z) \quad (6.5)$$

Selanjutnya kita mencari ungkapan untuk jumlah rata-rata sistem boson dalam assembli. Jumlah rata-rata sistem seperti dinyatakan dalam persamaan (3.34) menjadi

$$\begin{aligned} \bar{N} &= kT \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z_G \\ &= kT \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{PV}{kT} \right) \\ &= kT \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ -\frac{4\pi V}{h^3} \int_{0^+}^{\infty} p^2 \ln(1 - ze^{-\beta p^2/2m}) dp - \ln(1-z) \right\} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Mengingat $z = e^{\mu/kT}$ maka kita dapat menulis

$$\frac{\partial}{\partial \mu} = \frac{\partial z}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{kT} e^{\mu/kT} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{z}{kT} \frac{\partial}{\partial z}$$

Dengan demikian persamaan (6.6) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}
\bar{N} &= kT \left(\frac{z}{kT} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left\{ -\frac{4\pi V}{h^3} \int_{0^+}^{\infty} p^2 \ln(1 - ze^{-\beta p^2/2m}) dp - \ln(1-z) \right\} \\
&= -\frac{4\pi V z}{h^3} \int_{0^+}^{\infty} p^2 \frac{\partial}{\partial z} \ln(1 - ze^{-\beta p^2/2m}) dp + \frac{z}{1-z} \\
&= \frac{4\pi V z}{h^3} \int_{0^+}^{\infty} p^2 \left(\frac{1}{1 - ze^{-\beta p^2/2m}} \right) e^{-\beta p^2/2m} dp + \frac{z}{1-z} \\
&= \frac{4\pi V}{h^3} \int_{0^+}^{\infty} p^2 \frac{ze^{-\beta p^2/2m}}{1 - ze^{-\beta p^2/2m}} dp + \frac{z}{1-z} \\
&= \frac{4\pi V}{h^3} \int_{0^+}^{\infty} p^2 \frac{1}{z^{-1} e^{\beta p^2/2m} - 1} dp + \frac{z}{1-z} \tag{6.7}
\end{aligned}$$

Dari semua penjelasan di atas kita merangkum dua persamaan utama berikut ini

$$\frac{P}{kT} = -\frac{4\pi}{h^3} \int_{0^+}^{\infty} p^2 \ln(1 - ze^{-\beta p^2/2m}) dp - \frac{1}{V} \ln(1-z) \tag{6.5}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{N}{V} = \frac{4\pi}{h^3} \int_{0^+}^{\infty} p^2 \frac{1}{z^{-1} e^{\beta p^2/2m} - 1} dp + \frac{1}{V} \frac{z}{1-z} \tag{6.7}$$

Persamaan (6.5) dan (6.7) merupakan persamaan dasar untuk assembli boson dalam ensemble grand kanonik. Sama dengan sebelumnya, agar lebih sederhana, kita definisikan panjang gelombang termal partikel $\lambda = (2\pi\hbar^2/mkT)^{1/2}$. Dari persamaan (6.5) kita definisikan $\beta p^2/2m = x^2$. Dengan demikian, $p^2 = 2mx^2/\beta$, $p = (2m/\beta)^{1/2} x$, dan $dp = (2m/\beta)^{1/2} dx$. Substitusi ke dalam persamaan (6.5) dipeoleh

$$\begin{aligned}
\frac{P}{kT} &= -\frac{4\pi}{h^3} \int_0^{\infty} \left(\frac{2mx^2}{\beta} \right) \ln(1 - ze^{-x^2}) \sqrt{\frac{2m}{\beta}} dx - \frac{1}{V} \ln(1-z) \\
&= -\frac{4\pi}{h^3} \left(\frac{2m}{\beta} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} x^2 \ln(1 - ze^{-x^2}) dx - \frac{1}{V} \ln(1-z) \\
&= -\frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} x^2 \ln(1 - ze^{-x^2}) dx - \frac{1}{V} \ln(1-z) \\
&= -\frac{1}{\lambda^3} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^2 \ln(1 - ze^{-x^2}) dx - \frac{1}{V} \ln(1-z) \tag{6.8}
\end{aligned}$$

Kita definisikan fungsi boson-5/2 berikut ini

$$g_{5/2}(z) = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^2 \ln(1 - ze^{-x^2}) dx \tag{6.9}$$

Dengan menggunakan persamaan (6.9) maka persamaan (6.5) dapat ditulis menjadi

$$\frac{P}{kT} = \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(z) - \frac{1}{V} \ln(1-z) \tag{6.10}$$

Dengan cara serupa, persamaan (6.7) dapat ditulis

$$\begin{aligned}
\frac{1}{v} &= \frac{4\pi}{h^3} \int_0^{\infty} \left(\frac{2mx^2}{\beta} \right) \frac{1}{z^{-1}e^{x^2} - 1} \sqrt{\frac{2m}{\beta}} dx + \frac{1}{V} \frac{z}{1-z} \\
&= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} x^2 \frac{1}{z^{-1}e^{x^2} - 1} dx + \frac{1}{V} \frac{z}{1-z}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\lambda^3} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^2 \frac{1}{z^{-1}e^{x^2} - 1} dx + \frac{1}{V} \frac{z}{1-z} \quad (6.11)$$

Kemudian kita definisikan fungsi boson-3/2 sebagai berikut

$$g_{3/2}(z) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{x^2}{z^{-1}e^{x^2} - 1} dx \quad (6.12)$$

Substitusi persamaan (6.12) ke dalam persamaan (6.11) kita peroleh

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z) + \frac{1}{V} \frac{z}{1-z} \quad (6.13)$$

Perhatikan persamaan (6.9). Jika kita lakukan diferensial terhadap z maka kita peroleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} g_{5/2}(z) &= -\frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^2 \frac{\partial}{\partial z} \ln(1 - ze^{-x^2}) dx \\ &= -\frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^2 \frac{1}{1 - ze^{-x^2}} (-e^{-x^2}) dx = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^2 \frac{1}{e^{x^2} - z} dx \\ &= \frac{1}{z} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^2 \frac{1}{z^{-1}e^{x^2} - 1} dx \end{aligned}$$

Dengan memperhatikan persamaan (6.12) maka tampak jelas bahwa

$$z \frac{\partial}{\partial z} g_{5/2}(z) = g_{3/2}(z) \quad (6.14)$$

Baik $g_{3/2}(z)$ maupun $g_{5/2}(z)$ sulit diselesaikan secara analitik untuk semua z . Namun kita dapat menguraikan kedua fungsi tersebut dalam bentuk deret. Mari kita

perhatikan uraian berikut ini $1/(1-y) = 1 + y + y^2 + y^3 + \dots$. Dengan demikian

$$\begin{aligned} -\ln(1-y) &= \int \frac{dy}{1-y} = \int (1 + y + y^2 + y^3 + \dots) dy \\ &= y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \dots = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{y^{\ell}}{\ell} \end{aligned}$$

Kita substitusi $y = ze^{-x^2}$ sehingga

$$\ln(1 + ze^{-x^2}) = -\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(ze^{-x^2})^{\ell}}{\ell} = -\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z^{\ell} e^{-\ell x^2}}{\ell} \quad (6.15)$$

Dengan demikian kita dapat menguraikan persamaan (6.9) sebagai berikut

$$g_{5/2}(z) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z^{\ell}}{\ell} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\ell x^2} dx \quad (6.16)$$

Dengan menggunakan hasil yang diperoleh pada bab sebelumnya (persamaan (5.17)) maka persamaan (6.16) menjadi

$$g_{5/2}(z) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z^{\ell}}{\ell^{5/2}} \quad (6.17)$$

Fungsi $g_{3/2}(z)$ diperoleh dengan mendiferensialkan $g_{5/2}(z)$, yaitu

$$\begin{aligned} g_{3/2}(z) &= z \frac{d}{dz} g_{5/2}(z) = z \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell \frac{z^{\ell-1}}{\ell^{5/2}} \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z^{\ell}}{\ell^{3/2}} \end{aligned} \quad (6.18)$$

Kita akan menggunakan persamaan (6.10), (6.11), (6.17), dan (6.18) untuk membahas sifat-sifat boson. Kita akan bahas tiga topik khusus secara detail yaitu kondensasi bose-einstein, tekanan radiasi, dan sifat termal kristal.

6.2 Kondensasi Bose-Einstein

Mari kita perhatikan ungkapan deret untuk $g_{3/2}(z)$. Jika kita diferensial terhadap z diperoleh

$$\frac{d}{dz} g_{3/2}(z) = \frac{d}{dz} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z^{\ell}}{\ell^{3/2}} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell \frac{z^{\ell-1}}{\ell^{3/2}} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z^{\ell-1}}{\ell^{1/2}} \quad (6.19)$$

Tampak jelas dari persamaan (6.19) bahwa turunan $g_{3/2}(z)$ selalu positif sehingga $g_{3/2}(z)$ adalah fungsi monoton naik.

Mudah dibuktikan bahwa ruas kiri persamaan (6.13) memiliki nilai berhingga. Oleh karena itu ruas kanan juga harus memiliki nilai berhingga. Ini berimplikasi bahwa $g_{3/2}(z)$ juga harus berhingga. Dengan melihat bentuk fungsi $g_{3/2}(z)$ seperti diungkapkan dalam deret (6.18) maka $g_{3/2}(z)$ hanya berhingga untuk $0 \leq z < 1$.

Karena $g_{3/2}(z)$ adalah fungsi monoton naik maka $g_{3/2}(z) \leq g_{3/2}(1)$ untuk $0 \leq z \leq 1$. Dari deret (6.18) kita dapatkan

$$g_{3/2}(1) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell^{3/2}} = \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \quad (6.20)$$

Di mana $\zeta(x)$ adalah fungsi zeta Riemann. Nilai fungsi zeta Riemann untuk beberapa bilangan spesifik sudah ditabulasi. Khusus untuk $x = 3/2$ nilainya adalah 2,612... Jadi $g_{3/2}(1) = 2,612$ dan untuk semua $0 \leq z < 1$ berlaku $g_{3/2}(z) \leq 2,612$...

Misalkan N_0 adalah jumlah boson yang menempati keadaan dasar maka jelas dari persamaan (6.7)

$$N_0 = \frac{z}{1-z} \quad (6.21)$$

Persamaan (6.13) selanjutnya dapat ditulis

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z) + \frac{N_0}{V}$$

atau

$$\frac{\lambda^3}{V} N_0 = \frac{\lambda^3}{v} - g_{3/2}(z) \quad (6.22)$$

Karena $g_{3/2}(z) \leq g_{3/2}(1)$ maka

$$\frac{\lambda^3}{V} N_0 \geq \frac{\lambda^3}{v} - g_{3/2}(1) \quad (6.23)$$

Mengingat N_0 menyatakan jumlah boson yang berada di keadaan dasar maka di keadaan dasar (momentum = 0) dijumpai boson jika terpenuhi $\lambda^3 N_0 / V > 0$, atau

$$\frac{\lambda^3}{v} > g_{3/2}(1)$$

Kondisi ketika boson mulai ada di keadaan dasar kita sebut sebagai keadaan kritis. Kondisi kritis ini mulai terjadi ketika $\lambda = \lambda_c$ dan ditandai oleh hubungan

$$\frac{\lambda_c^3}{v} = g_{3/2}(1) \quad (6.24)$$

Dengan memasukkan bentuk eksplisit dari λ kita dapat menulis

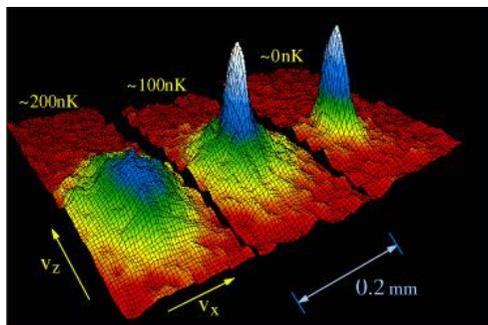
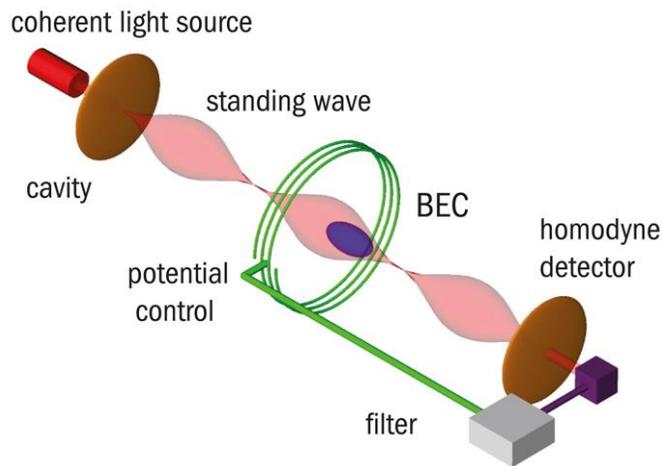
$$\frac{1}{v} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mkT_c} \right)^{3/2} = g_{3/2}(1)$$

di mana T_c disebut suhu kritis atau suhu transisi di mana mulai terjadi penempatan keadaan dengan momentum nol oleh boson. Dari persamaan di atas maka ungkapan suhu transisi adalah

$$T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{mkv^{2/3} [g_{3/2}(1)]^{2/3}} \quad (6.25)$$

Suhu T_c disebut suhu kondensasi Bose-Einstein. Tampak jelas bahwa suhu transisi bergantung pada massa partikel boson dan volum rata-rata yang ditempati satu partikel boson. Makin besar massa partikel boson atau makin besar volume rata-rata yang ditempati partikel boson maka suhu transisi makin kecil. Dengan memasukkan sejumlah nilai massa maupun volum rata-rata yang ditempati partikel boson dapat dihitung suhu transisi memiliki nilai di bawah ratusan nano kelvin.

Kondensasi Bose-Einstein sudah diamati dalam percobaan pada suhu sangat rendah. Kumpulan atom didinginkan dan ditembakkan dengan cahaya koheren. Cahaya transmisi dideteksi. Boson yang berada pada keadaan eksitasi dan keadaan konsensasi meneruskan cahaya dengan sifat yang berbeda. Dengan mengamati perubahan sifat cahaya transmisi ketika melewati kumpulan boson yang didinginkan maka dapat diamati terjadinya perubahan populasi boson yang berada pada keadaan dasar. **Gambar 6.1** adalah skema percobaan pengamatan kondensasi bose-einstein (atas) dan perubahan polupasi boson ketika suhu diturunkan (bawah). Warna biru menyatakan boson yang berada pada keadaan dasar (boson yang mengalami kondensasi).



Gambar 6.1 (atas) skema percobaan deteksi peristiwa kondensasi Bose-Einstein. Kumpulan atom yang didinginkan pada suhu mendekati 0 K disinari dengan cahaya koheren. Cahaya yang melewati kumpulan atom tersebut dideteksi dengan detektor yang sangat sensitif. Pola intensitas cahaya yang lolos diamati. Ketika suhu mendekati 0 K terjadi pertumbuhan pola yang berbeda dan makin besar ketika suhu makin diturunkan. Bagian yang tumbuh tersebut dihasilkan oleh boson yang mengalami kondensasi. (bawah) Contoh pertumbuhan boson yang mengalami kondensasi. Pada suhu 200 nK mulai ada boson yang mengalami kondensasi dan makin banyak (intensitas makin tinggi) ketika suhu makin menuju 0 K (physicsworld.com, hyperphysics.phy-astr.gsu.edu).

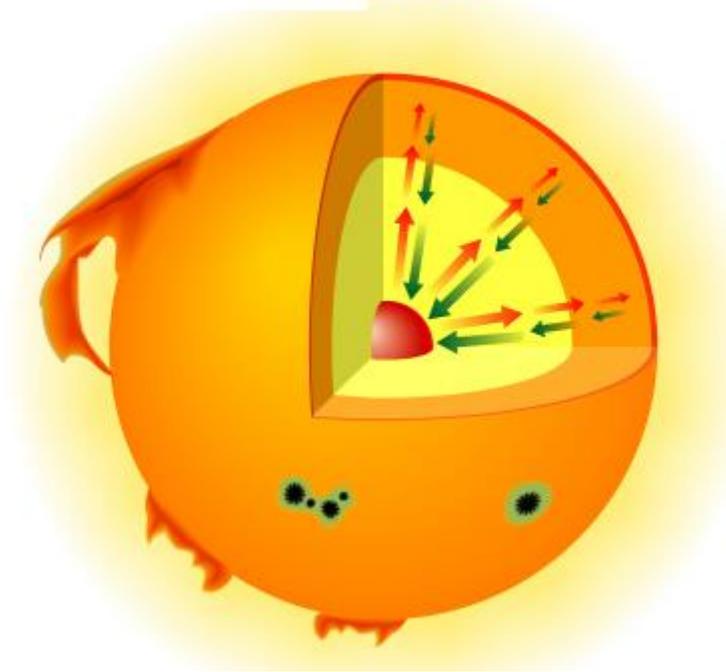
6.3 Tekanan Radiasi

Matahari atau bintang adalah massa yang berbentuk gas yang memiliki suhu sangat tinggi. Massa matahari dan bintang-bintang sangat besar. Matahari kita memiliki massa 2×10^{30} kg. Bumi sendiri memiliki massa $5,96 \times 10^{24}$ kg. Dengan demikian massa matahari sekitar 336.000 kali massa bumi. Dengan massa yang sangat besar tersebut maka matahari melakukan gaya gravitasi yang sangat tinggi pada material penyusunnya. Dengan wujud yang berbentuk gas maka harusnya material penyusun matahari tertarik ke pusat matahari atau runtuh ke pusat matahari. Tetapi mengapa hal tersebut tidak terjadi? Mengapa material penyusun matahari tetap stabil dan tidak tumpah ke matahari?

Material penyusun matahari tidak tumpah ke pusat karena dari dalam matahari dihasilkan tekanan. Tekanan tersebut dihasilkan oleh radiasi yang diproduksi dari dalam matahari. Dengan suhu yang sangat tinggi matahari memancarkan radiasi ke segala arah dalam jumlah yang sangat besar. Radiasi tersebut membawa momentum sehingga dapat menghasilkan gaya. Gaya tersebutlah yang mengimbangi gaya gravitasi sehingga bentuk matahari atau bintang-bintang tetap stabil (**Gambar 6.2**).

Radiasi matahari tetap dihasilkan selama di pusat matahari masih berlangsung reaksi fusi nuklir (penggabungan inti hidrogen menjadi inti helium). Masalah akan muncul ketika hidrogen sebagai bahan bakar fusi nuklir habis. Reaksi nuklir akan berhenti sehingga matahari pun berhenti memproduksi radiasi. Akibatnya, tidak ada lagi gaya radiasi yang mengimbangi gaya gravitasi. Material penyusun matahari atau bintang akan runtuh sehingga ukuran bintang mengecil.

Gaya oleh tekanan radiasi 
Gaya oleh gravitasi 



Gambar 6.2. Ukuran bintang ditentukan oleh kompetisi antara gaya akibat tekanan radiasi yang berasal dari dalam ke arah luar dan gaya akibat gravitasi pada material bintang yang berarah dari luar ke dalam (www4.nau.edu)

Pada bagian ini kita akan menghitung tekanan yang dihasilkan oleh radiasi. Kita mulai dari fungsi grand partisi untuk boson pada persamaan (6.1). Ketika kita menurunkan fungsi distribusi untuk boson (lihat materi Fisika Statistik), parameter α adalah pengali Lagrange yang diperkenalkan untuk menjamin kekonstanan jumlah sistem (partikel). Namun, untuk foton maupun fonon, jumlah partikel dapat diciptakan dan dimusnahkan (tidak konstan) sehingga pengali Lagrange untuk konstrain jumlah partikel tidak diperlukan. Ini setara dengan nilai $\alpha = 0$ atau $z = 1$. Jadi, fungsi grand partisi untuk foton atau fonon memenuhi

$$Z_G = \prod_j \frac{1}{1 - e^{-\beta \epsilon_j}}$$

atau

$$\ln Z_G = - \sum_j \ln(1 - e^{-\beta \epsilon_j}) \quad (6.26)$$

Lebih lanjut, karena foton memiliki dua arah polarisasi maka penjumlahan terhadap indeks j meliputi penjumlahan terhadap polarisasi dan penjumlahan terhadap tingkat energi. Penjumlahan terhadap polarisasi dapat dilakukan langsung dan menghasilkan dua kali penjumlahan terhadap energi saja. Jadi kita dapat menulis persamaan (6.26) menjadi

$$\ln Z_G = -2 \sum_k \ln(1 - e^{-\beta \epsilon_k}) \quad (6.27)$$

Sudah kita turunkan di bab sebelumnya bahwa ada hubungan antara perkalian tekanan dan volum dengan fungsi grand partisi, yaitu $PV = kT \ln Z_G$. Tekanan yang dihasilkan memenuhi persamaan

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{\partial (pV)}{\partial V} \right)_{T, \mu} \\ &= \frac{\partial}{\partial V} (kT \ln Z_G) = kT \frac{\partial}{\partial V} \ln Z_G \end{aligned} \quad (6.28)$$

Misalkan assembli foton berada dalam kotak dengan dimensi L . Volume assembli adalah $V = L^3$ atau panjang sisi kotak adalah $L = V^{1/3}$. Bilangan gelombang berdiri yang dapat terjadi dalam kotak memenuhi

$$k = n \frac{2\pi}{L} = 2\pi n V^{-1/3} \quad (6.29)$$

Dengan demikian, energi foton di dalam kotak dapat ditulis

$$\varepsilon_k = \hbar\omega = \hbar ck = 2\pi\hbar cn V^{-1/3} \quad (6.30)$$

Substitusi persamaan (6.30) ke dalam persamaan (6.28) dan (6.27) diperoleh

$$p = -2kT \frac{\partial}{\partial V} \sum_k \ln(1 - e^{\beta 2\pi\hbar cn V^{-1/3}}) \quad (6.31)$$

Untuk menyelesaikan persamaan (6.31), mari kita gunakan hubungan berikut ini $\ln(1 - e^{-y}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} e^{-my}$. Jika disubstitusi ke dalam persamaan (6.31) kita peroleh

$$\begin{aligned} p &= -2kT \frac{\partial}{\partial V} \sum_k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} e^{m(\beta 2\pi\hbar cn V^{-1/3})} \\ &= -2kT \sum_k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} e^{m(\beta 2\pi\hbar cn V^{-1/3})} \left[-\frac{1}{3} m \beta 2\pi\hbar cn V^{-4/3} \right] \\ &= -2kT \sum_k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} e^{m\beta\varepsilon_k} \left[-\frac{1}{3} m \beta \varepsilon_k / V \right] \\ &= \frac{2kT\beta}{3V} \sum_k \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_k e^{m\beta\varepsilon_k} = \frac{2kT\beta}{3V} \sum_k \varepsilon_k \sum_{m=1}^{\infty} e^{m\beta\varepsilon_k} \\ &= \frac{2kT\beta}{3V} \sum_k \varepsilon_k \frac{e^{\beta\varepsilon_k}}{1 - e^{\beta\varepsilon_k}} \quad (6.32) \end{aligned}$$

Terlebih dahulu mari kita hitung penjumlahan berikut ini

$$\sum_k \varepsilon_k \frac{e^{\beta \varepsilon_k}}{1 - e^{\beta \varepsilon_k}}$$

Kita ganti penjumlahan dengan integral yang diawali dengan melakukan transformasi sebagai berikut

$$\varepsilon_k \rightarrow \hbar \omega$$

$$\begin{aligned} \sum_k &\rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 dk = \frac{1}{2\pi^2} (\omega/c)^2 d(\omega/c) \\ &= \frac{1}{2\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega \end{aligned} \quad (6.33)$$

Dengan transformasi tersebut maka kita dapatkan

$$\begin{aligned} \sum_k \varepsilon_k \frac{e^{\beta \varepsilon_k}}{1 - e^{\beta \varepsilon_k}} &= \int_0^\infty \frac{1}{2\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega (\hbar \omega) \frac{e^{\beta \hbar \omega}}{1 - e^{\beta \hbar \omega}} \\ &= \frac{\hbar}{2\pi^2 c^3} \int_0^\infty \omega^3 d\omega \frac{e^{\beta \hbar \omega}}{1 - e^{\beta \hbar \omega}} = \frac{\hbar}{2\pi^2 c^3} \int_0^\infty \omega^3 d\omega e^{\beta \hbar \omega} \sum_{m=0}^\infty e^{m\beta \hbar \omega} \\ &= \frac{\hbar}{2\pi^2 c^3} \int_0^\infty \omega^3 d\omega \sum_{m=0}^\infty e^{(m+1)\beta \hbar \omega} = \frac{\hbar}{2\pi^2 c^3} \int_0^\infty \omega^3 d\omega \sum_{m=1}^\infty e^{m\beta \hbar \omega} \\ &= \frac{\hbar}{2\pi^2 c^3} \sum_{m=1}^\infty \int_0^\infty \omega^3 d\omega e^{m\beta \hbar \omega} = \frac{\hbar}{2\pi^2 c^3} \times 6 \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{(m\beta \hbar)^4} \\ &= \frac{\hbar}{2\pi^2 c^3} \times \frac{6}{\beta^4 \hbar^4} \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m^4} = \frac{\hbar}{2\pi^2 c^3} \times \frac{6}{\beta^4 \hbar^4} \times \frac{\pi^4}{90} \end{aligned}$$

$$= \frac{4\pi^5 (kT)^4}{15 (hc)^3} \quad (6.34)$$

Akhirnya dengan substitusi persamaan (6.34) ke dalam persamaan (6.32) kita dapatkan

$$p = \frac{2kT\beta}{3V} \times \frac{4\pi^5 (kT)^4}{15 (hc)^3} = \frac{8\pi^5 (kT)^4}{45 V (hc)^3} \quad (6.35)$$

Persamaan (6.35) adalah tekanan radiasi yang dihasilkan oleh benda yang memiliki suhu T .

Untuk foton dengan dua arah polarisasi, energi total foton memenuhi persamaan

$$U = 2 \sum_k \varepsilon_k \frac{e^{\beta\varepsilon_k}}{1 - e^{\beta\varepsilon_k}} \quad (6.36)$$

Kemudian mengacu pada persamaan (6.32) kita dapatkan

$$U = 2 \times \frac{4\pi^5 (kT)^4}{15 (hc)^3} = \frac{4\pi^5 (kT)^4}{15 (hc)^3} \quad (6.37)$$

Dengan membandingkan persamaan (6.35) dan (6.37) kita dapatkan

$$P = \frac{1}{3} \frac{U}{V} \quad (6.38)$$

Dari sejumlah penjelasan di atas kita sudah membuktikan bahwa radiasi elektromagnetik menghasilkan tekanan. Tekanan yang dihasilkan merupakan fungsi pangkat 4 dari suhu. Dengan suhu ratusan juta kelvin maka dapat diprediksi bahwa tekanan radiasi di bintang sangat besar. Tekanan itulah yang melawan gaya

gravitasi sehingga bintang tidak runtuh. Persamaan (6.38) menunjukkan bahwa tekanan radiasi berbanding langsung dengan kerapatan energi yang dimiliki benda, yaitu $P = u/3$ dengan $u = U/V$ adalah energi per satuan volum.

6.4 Sifat Termal Fonon

Sama dengan foton, fonon mengalami peristiwa produksi dan musnah secara berulang-ulang di dalam assembli kristal. Dengan demikian jumlah fonon dalam assembli tidak konstan. Tidak ada potensial kimia yang berkaitan dengan produksi atau pemusnahan fonon sehingga $\mu = 0$ atau $z = 1$. Fungsi grand partisi fonon menjadi persis sama dengan persamaan (6.26).

Penjumlahan terhadap j meliputi penjumlahan terhadap tingkat energi dan polarisasi. Fonon memiliki tiga arah polarisasi (vibrasi dalam arah sumbu x , sumbu y , dan sumbu z) (**Gambar 6.3**). Misalkan kristal bersifat isotropik maka tiga arah polarisasi bersifat identik dan kita dapat langsung mengganti $\sum_j = 3\sum_k$

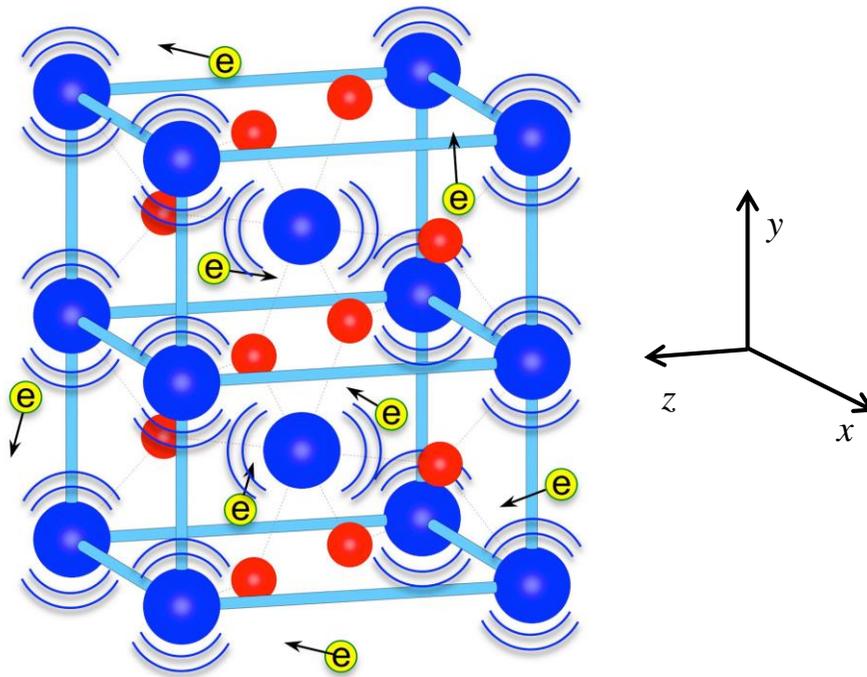
dengan k adalah indeks untuk tingkat energi saja. Dengan demikian untuk fonon persamaan (6.26) menjadi

$$\ln Z_G = -3 \sum_k \ln(1 - e^{-\beta \varepsilon_k}) \quad (6.39)$$

Fonon dapat dipandang sebagai gelombang, serupa dengan gelombang elektromagnetik. Hubungan antara bilangan gelombang dan frekuensi yang berlaku pada gelombang elektromagnetik juga berlaku pada fonon. Dengan demikian, energi fonon dapat ditulis dalam bentuk $\varepsilon_k = \hbar\omega(k)$ dan hubungan antara frekuensi dan panjang gelombang memenuhi

$$\omega = v_g k \quad (6.40)$$

dengan v_g adalah kecepatan grup.



Gambar 6.3. Secara umum atom-atom dalam kristal memiliki tiga arah vibrasi. (memiliki tiga polarisasi) (www1.aps.anl.gov)

Seperti yang telah kita lakukan pada gelombang elektromagnetik, kita dapat mengganti penjumlahan pada persamaan dengan integral sebagai berikut

$$\sum_k (\dots) \rightarrow \int (\dots) \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3}$$

$$= \int (\dots) \frac{4\pi(\omega/v_g)^2 d(\omega/v_g)}{(2\pi)^3} = \frac{4\pi}{(2\pi)^3 v_g^3} \int (\dots) \omega^2 d\omega$$

Dengan transformasi tersebut maka persamaan (6.39) menjadi

$$\ln Z_G = -\frac{12\pi}{(2\pi)^3 v_g^3} \int \omega^2 \ln(1 - e^{\beta\hbar\omega}) d\omega \quad (6.41)$$

Berbeda dengan gelombang elektromagnetik yang dapat memiliki frekuensi dari 0 sampai tak berhingga, menurut Debye fonon hanya diijinkan memiliki frekuensi dari nol hingga frekuensi maksimum tertentu. Frekuensi maksimum tersebut bergantung pada jenis material. Misalkan frekuensi maksimum kita tandai dengan ω_m maka bentuk lengkap dari persamaan (6.41) adalah

$$\ln Z_G = -\frac{3}{2\pi^2 v_g^3} \int_0^{\omega_m} \omega^2 \ln(1 - e^{\beta\hbar\omega}) d\omega \quad (6.42)$$

Energi assembli memenuhi persamaan

$$U = \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_G = \frac{3\hbar}{2\pi^2 v_g^3} \int_0^{\omega_m} \frac{\omega^3}{e^{-\beta\hbar\omega} - 1} d\omega \quad (6.43)$$

Untuk menyelesaikan persamaan (6.43) kita misalkan $\omega = x/(-\beta\hbar)$. Dengan demikian $d\omega = dx/(-\beta\hbar)$, dan $\omega_m = x_m/(-\beta\hbar)$. Substitusi ke dalam persamaan (6.43) kita peroleh

$$\begin{aligned} U &= \frac{3\hbar}{2\pi^2 v_g^3} \int_0^{x_m} \frac{[x/(-\beta\hbar)]^3}{e^x - 1} d\left[\frac{x}{(-\beta\hbar)}\right] = \frac{3\hbar}{2\pi^2 v_g^3 (-\beta\hbar)^4} \int_0^{x_m} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \\ &= \frac{3(kT)^4}{2\pi^2 (\hbar v_g)^3} \int_0^{x_m} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \end{aligned} \quad (6.44)$$

Untuk menyelesaikan persamaan (6.44) mari terlebih dahulu kita definisikan fungsi berikut ini

$$\Phi(y) = \int_0^y \frac{x^3}{e^x - 1} dx \quad (6.45)$$

Dengan fungsi tersebut maka persamaan (6.44) dapat ditulis

$$U = \frac{3(kT)^4}{2\pi^2(\hbar v_g)^3} \Phi(x_m) \quad (6.46)$$

Fungsi $\Phi(y)$ sulit untuk dihitung langsung. Yang dapat kita lakukan adalah mencari aprokasi pada kondisi ekstrim di mana $y \ll 1$ atau $y \gg 1$. Jika $y \ll 1$ maka semua x dalam integral (6.45) memenuhi $x \ll 1$. Dengan demikian kita dapat melakukan aproksimasi berikut ini

$$e^x - 1 \approx (1 + x + x^2/2) - 1 = x + x^2/2 = x(1 + x/2)$$

Dan fungsi pada persamaan (6.45) teraproksimasi menjadi

$$\begin{aligned} \Phi(y) &\approx \int_0^y \frac{x^3}{x(1+x/2)} dx = \int_0^y x^2(1+x/2)^{-1} dx \approx \int_0^y x^2(1-x/2) dx \\ &= \int_0^y (x^2 - x^3/2) dx = \frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{8} y^4 \end{aligned} \quad (6.47)$$

Sebaliknya, jika $y \gg 1$, kita lakukan proses perhitungan berikut ini. Kita mulai dengan melakukan penguraian deret berikut ini.

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^x - 1} &= \frac{1}{e^x(1 - e^{-x})} = \frac{1}{e^x} (1 + e^{-x} + e^{-2x} + \dots) \\ &= (e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \end{aligned}$$

Dengan uraian deret ini maka fungsi $\Phi(y)$ menjadi

$$\Phi(y) = \int_0^y x^3 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^y x^3 e^{-nx} dx$$

Mari kita selesaikan dulu integral berikut ini

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^y x^3 e^{-nx} dx = -\frac{d^3}{dn^3} \int_0^y e^{-nx} dx$$

Untuk y yang sangat besar kita bisa ambil $y \rightarrow \infty$ sehingga

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^y x^3 e^{-nx} dx \approx -\frac{d^3}{dn^3} \int_0^{\infty} e^{-nx} dx = -\frac{d^3}{dn^3} \frac{1}{n} = \frac{6}{n^4}$$

Dengan demikian aproksimasi $\Phi(y)$ pada y yang sangat besar adalah

$$\Phi(y) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^4} = 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = 6 \times \frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{15} \quad (6.48)$$

Dari persamaan (6.46), (6.47), dan (6.48) kita dapatkan ungkapan untuk energi dalam pada dua kondisi ekstrem sebagai berikut

$$U = \frac{3(kT)^4}{2\pi^2(\hbar v_g)^3} \times \begin{cases} \frac{1}{3}x_m^3 - \frac{1}{8}x_m^4 & x_m \ll 1 \\ \frac{\pi^4}{15} & x_m \gg 1 \end{cases} \quad (6.49)$$

Karena $x_m = -\hbar\omega_m\beta = \frac{\hbar\omega_m}{kT}$ maka kita dapat menulis ulang persamaan (6.49)

sebagai

$$U = \frac{3(kT)^4}{2\pi^2(\hbar v_g)^3} \times \begin{cases} \frac{1}{3} \left(\frac{\hbar\omega_m}{kT} \right)^3 - \frac{1}{8} \left(\frac{\hbar\omega_m}{kT} \right)^4 & T \rightarrow \infty \\ \frac{\pi^4}{15} & T \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$= \frac{3k^4}{2\pi^2(\hbar v_g)^3} \times \begin{cases} \frac{1}{3} \left(\frac{\hbar\omega_m}{k} \right)^3 T - \frac{1}{8} \left(\frac{\hbar\omega_m}{k} \right)^4 & T \rightarrow \infty \\ \frac{\pi^4}{15} T^4 & T \rightarrow 0 \end{cases} \quad (6.50)$$

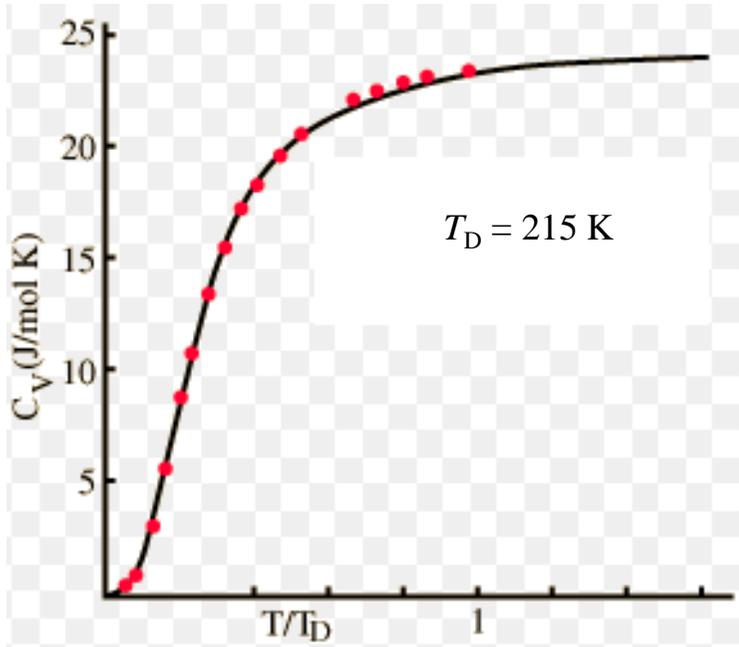
Dari ungkapan energi dapat kita tentukan kapasitas kalor sebagai berikut

$$C_v = \frac{dU}{dT}$$

$$= \frac{3k^4}{2\pi^2(\hbar v_g)^3} \times \begin{cases} \frac{1}{3} \left(\frac{\hbar\omega_m}{k} \right)^3 & T \rightarrow \infty \\ \frac{4\pi^4}{15} T^3 & T \rightarrow 0 \end{cases} \quad (6.51)$$

Kita definisikan suhu Debye sebagai berikut $T_D = \hbar\omega_m / k$. Dari definisi tersebut maka kapasitas kalor memenuhi persamaan

$$C_v = \frac{3k^4}{2\pi^2(\hbar v_g)^3} \times \begin{cases} \frac{1}{3} T_D^3 & T \rightarrow \infty \\ \frac{4\pi^4}{15} T^3 & T \rightarrow 0 \end{cases} \quad (6.52)$$



Gambar 6.4. Kapasitas kalor perak. Simbol adalah eksperimen dan garis adalah teori Debye dengan menggunakan suhu Debye 215 K (hyperphysics.phy-astr.gsu.edu)

Tampak dari persamaan (6.52) bahwa pada suhu sangat tinggi kapasitas kalor kristal tidak bergantung pada suhu. Ini sesuai dengan hukum Dulong-Petit yang diturunkan dari fisika klasik (persamaan ekuipartisi energi). Sebaliknya, pada suhu mendekati 0 K kapasitas kalor berubah sesuai dengan pangkat tiga suhu.

Gambar 6.4 adalah contoh hasil pengukuran kapasitas perak dan kurva Debye yang dibuat dengan menggunakan $T_D = 215$ K. Tampak jelas kesesuaian yang luar biasa antara hasil eksperimen dengan teori Debye.

6.5 Radiasi Benda Hitam untuk Foton dan Neutrino

Sekarang kita coba membandingkan sifat radiasi benda hitam foton dan neutron. Topik ini dibahas oleh Walsh dan Gallo (P.J Walsh dan F.F. Gallo, *American Journal of Physics* **48**, 599 (1980)). Asumsi adalah neutrino adalah partile

yang dipancarkan bintang-bintang dan bergerak dengan laju sama dengan laju cahaya. Neutrino tidak (atau hampir tidak) memiliki massa sehingga sifat radiasi neutrino mirip dengan sifat radiasi gelombang elektromagnetik. Perbedaannya adalah neutrino berinteraksi sangat lemah dengan material sedangkan gelombang elektromagnetik berinteraksi kuat dengan material. Perbedaan lain adalah neutrino merupakan fermion dengan spin $\hbar/2$ sedangkan foton adalah boson dengan spin \hbar . Selama kita membahas radiasi neutrino saat meninggalkan permukaan bintang dan menuju ruang dalam alam semesta (tidak ada materi di situ) maka sifat radiasi neutrino hampir mendekati sifat radiasi foton. Energi foton memenuhi persamaan $\epsilon(\omega) = \hbar\omega$ dan energi neutrino juga memenuhi hubungan yang sama.

Kerapatan keadaan gelombang per satuan volum per satuan frekuensi memenuhi persamaan $N(\omega) = 4\pi\omega^2 / c^3$. Karena foton memiliki dua arah polarisasi (degenerasi 2) maka keparapan keadaan foton per satuan volum per satuan frekuensi adalah

$$N_p(\omega) = 2 \left(\frac{4\pi\omega^2}{c^3} \right) \quad (6.53)$$

Neutrino memiliki dua spin ($\pm\hbar/2$) sehingga memberikan dua degenerasi dan neutrino muncul dalam s tipe. Dengan demikian total degenerasi neutrino adalah $2s$. Oleh karena itu kerapatan keadaan neutrino per satuan volum per satuan frekuensi adalah

$$N_s(\omega) = 2s \left(\frac{4\pi\omega^2}{c^3} \right) \quad (6.54)$$

Jumlah rata-rata foton yang memiliki frekuensi ω memenuhi statistik bose-einstein yaitu

$$n_f(\omega) = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \quad (6.55)$$

Jumlah rata-rata neutrino yang memiliki frekuensi ω memenuhi statistik fermi-dirac

yaitu

$$n_n(\omega) = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} + 1} \quad (6.56)$$

Dengan demikian, kerapatan energi foton dan neutrino menjadi

$$\rho_f(\omega) = N_f(\omega)n_f(\omega)\hbar\omega = \frac{8\pi\omega^2}{c^3} \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \quad (6.57)$$

$$\rho_n(\omega) = N_n(\omega)n_n(\omega)\hbar\omega = \frac{8\pi\omega^2}{c^3} \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} + 1} \quad (6.58)$$

Berdasarkan persamaan (6.57) dan (6.58) kita dapat mencari pendekatan pada suhu sangat rendah dan suhu sangat tinggi. Pada suhu sangat rendah terpenuhi $\hbar\omega \gg kT$ sehingga $\exp(\hbar\omega/kT) \pm 1 \approx \exp(\hbar\omega/kT)$. Akibatnya kerapatan energi foton dan neutrino menjadi

$$\rho_f(\omega) \approx \frac{8\pi\hbar\omega^3}{c^3} \exp(-\hbar\omega/kT) \quad (6.59)$$

$$\rho_n(\omega) \approx \frac{8\pi\hbar\omega^3}{c^3} \exp(-\hbar\omega/kT) \quad (6.70)$$

Pada suhu sangat tinggi sehingga terpenuhi $\hbar\omega/kT \ll 1$ maka $\exp(\hbar\omega/kT) - 1 \approx \{1 - (\hbar\omega/kT)\} - 1 = \hbar\omega/kT$ dan $\exp(\hbar\omega/kT) + 1 \approx \{1 + (\hbar\omega/kT)\} + 1 \approx 2$. Dengan demikian, kerapatan foton dan neutrino menjadi

$$\rho_f(\omega) \approx \frac{8\pi\omega^2 kT}{c^3} \quad (6.71)$$

$$\rho_n(\omega) \approx \frac{4\pi\pi\omega^2}{c^3} \quad (6.72)$$

Tampak bahwa kerapatan energi foton meningkat dengan bertambahnya suhu sedangkan kerapatan energi neutrino konstan.

Daya radiasi foton atau neutrino yang dipancarkan bintang pada frekuensi ω memenuhi persamaan

$$\begin{aligned} R_f(\omega) &= \frac{c}{4} \rho_f(\omega) \\ &= \frac{2\pi\omega^2}{c^2} \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} = \frac{2\pi k^3 T^3}{\hbar^2 c^2} \frac{(\hbar\omega/kT)^3}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \end{aligned} \quad (6.73)$$

dan

$$\begin{aligned} R_n(\omega) &= \frac{c}{4} \rho_n(\omega) \\ &= \frac{2\pi\pi\omega^2}{c^2} \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} + 1} = \frac{2\pi k^3 T^3}{\hbar^2 c^2} \frac{(\hbar\omega/kT)^3}{e^{\hbar\omega/kT} + 1} \end{aligned} \quad (6.74)$$

Kita substitusi variabel baru $x = \hbar\omega/kT$ sehingga .

$$R_f(x) = \frac{2\pi k^3 T^3}{\hbar^2 c^2} \frac{x^3}{e^x - 1} \quad (6.75)$$

$$R_n(x) = \frac{2\pi k^3 T^3}{\hbar^2 c^2} \frac{x^3}{e^x + 1} \quad (6.76)$$

Radiasi yang dipancarkan dengan energi maksimum dapat diperoleh dengan mendifensial persamaan di atas. Hasilnya adalah

$$\frac{dR_f(x)}{dx} = \frac{2\pi k^3 T^3}{\hbar^2 c^2} \frac{d}{dx} \frac{x^3}{e^x - 1} = 0$$

$$(3-x)e^x - 3 = 0$$

Solusi untuk x adalah $x_m = \hbar\omega_m/kT = hc/\lambda_m kT = 2,8225$ atau

$$\lambda_m T = \frac{hc}{2,8225k} \quad (6.77)$$

Dengan cara yang sama maka untuk neutrino

$$\frac{dR_n(x)}{dx} = \frac{2\pi k^3 T^3}{\hbar^2 c^2} \frac{d}{dx} \frac{x^3}{e^x + 1} = 0$$

$$(3-x)e^x + 3 = 0$$

Solusi untuk x adalah $x_m = \hbar\omega_m/kT = hc/\lambda_m kT = 3,1325$ atau

$$\lambda_m T = \frac{hc}{3,1325k} \quad (6.78)$$

Persamaan (6.77) dan (6.78) adalah persamaan pergeseran Wien untuk foton dan neutrino. Persamaan (6.77) sudah sering kita pelajari karena merupakan persamaan yang diturunkan Wien sendiri satu abad yang lalu. Persamaan (6.78) mungkin baru pertama kita lihat.

Latihan

1) Jumlah rata-rata sistem yang menempati tingkat energi ke- j dalam assembly boson memenuhi

$$\langle n_j \rangle = \frac{1}{e^{(\varepsilon_j - \mu)/kT} - 1}$$

Dengan demikian jumlah total sistem boson diberikan oleh persamaan

$$N = \sum_j \langle n_j \rangle = \sum_j \frac{1}{e^{(\varepsilon_j - \mu)/kT} - 1}$$

a) Dari persamaan di atas buktikan bahwa potensial kimia memenuhi $\mu \leq \varepsilon_0$.

Petunjuk: Jika μ tidak lebih kecil dari ε_0 maka akan ada energi yang lebih kecil daripada μ . Dengan demikian, ada tingkat energi ke- i sedemikian sehingga $\varepsilon_i < \mu$ pada semua $j < i$. Buktikan bahwa kondisi ini tidak memiliki makna fisis.

b) Pada suhu $T \rightarrow 0$ hampir semua boson berada pada tingkat energi paling rendah (ε_0). Buktikan bahwa pada suhu $T \rightarrow 0$, potensial kimia memenuhi

$$\lim_{T \rightarrow 0} \mu = \varepsilon_0 - kT \ln \left(1 + \frac{1}{N} \right)$$

c) Dengan mendefinisikan $\varepsilon = \varepsilon_j - \varepsilon_0$ buktikan bahwa N dapat ditulis sebagai

$$N = \sum_{s=1} e^{-s(\varepsilon_0 - \mu)/kT} \sum_{\varepsilon \geq 0} e^{-s\varepsilon/kT}$$

d) Kerapatan keadaan partikel tidak berinteraksi dalam kotak 3 dimensi memenuhi persamaan

$$\rho(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{2\pi V(2m)^{3/2}}{h^3} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon$$

Jika sumasi di atas ditransformasi ke dalam bentuk integral maka kita dapat menulis

$$N = \frac{2\pi V(2m)^{3/2}}{h^3} \sum_{s=1}^{\infty} e^{-s(\varepsilon_0 - \mu)/kT} \sum_{\varepsilon \geq 0} \int_0^{\infty} \varepsilon^{1/2} e^{-s\varepsilon/kT} d\varepsilon$$

Buktikan bahwa integral di atas menghasilkan

$$N = \frac{V(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3} F[(\varepsilon_0 - \mu)/kT]$$

dengan $F[x]$ adalah fungsi London yang diberikan oleh

$$F[x] = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{-sx}}{s^{3/2}}$$

e) Salah satu sifat fungsi London adalah $F[0] = 2,612$. Dari sifat ini buktikan bahwa pada suhu T_0 yang sangat rendah terpenuhi hubungan

$$N \approx 2,612 \frac{V(2\pi mkT_0)^{3/2}}{h^3}$$

Bab 7

EKSPANSI KLUSTER

Pada bab ini kita akan mempelajari salah satu metode ekspansi dalam mekanika statistik. Metode ekspansi yang sangat populer adalah ekspansi kluster yang diperkenalkan oleh Meyer. Topik ini cukup sulit dipahami karena sangat abstrak. Kita akan membahas secara lebih rinci sehingga dapat dipahami lebih mudah daripada pembahasan yang dikemukakan di sejumlah buku yang telah ada.

7.1 Pendahuluan

Metode ekspansi kluster digunakan untuk mencari persamaan keadaan assembli yang mengandung partikel-partikel yang saling berinteraksi satu dengan lainnya. Dengan adanya interaksi ini maka energi total tidak hanya berupa energi kinetik tetapi juga mengandung komponen energi potensial yang merupakan fungsi jarak antar partikel. Energi interaksi antar partikel ke- i dan ke- j kita nyatakan sebahai $u(r_{ij})$ di mana $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$. Energi total yang dimiliki assembli menjadi

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N u(r_{ij}) \quad (7.1)$$

Pada penjumlahan double di atas kita batasi $i>j$ untuk menghindari perhitungan double mengingat $u(r_{ij}) = u(r_{ji})$. Kita juga meniadakan suku dengan $i = j$ karena tidak ada interaksi partikel dengan dirinya sendiri.

Kita juga akan membatasi pada interaksi yang tidak terlalu besar. Karena umumnya metode ekspansi dapat diterapkan jika ekspansi dilakukan terhadap suku yang ordenya kecil (lebih kecil dari satu) untuk mencapai konvergensi. Interaksi yang tidak terlalu besar sering ditemui pada assembli gas. Meskipun ada interaksi antar partikel gas namun atom atau molekul gas masih dapat bergerak dengan

bebas. Ini menunjukkan bahwa tarikan atau tolakan antara atom atau molekul tersebut sangat kecil.

Dengan menggunakan energi interaksi pada persamaan (7.1) maka fungsi partisi kanonik untuk partikel yang bersigat semiklasik dapat ditulis

$$Z_N = \frac{1}{N!h^{3N}} \int \dots \int d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2 \dots d^3\vec{r}_N d^3\vec{p}_1 d^3\vec{p}_2 \dots d^3\vec{p}_N e^{\beta \left[\sum_i p_i^2/2m + \sum_{i>j} u(r_{ij}) \right]} \quad (7.2)$$

Komponen energi kinetik dan energi potensial masing-masing merupakan variabel bebas (tidak terkait satu sama lainnya) sehingga integral dapat dilakukan masing-masing. Jadi kita dapat menulis

$$Z_N = \frac{1}{N!h^{3N}} \int \dots \int d^3\vec{p}_1 d^3\vec{p}_2 \dots d^3\vec{p}_N e^{\beta \sum_i p_i^2/2m} \int \dots \int d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2 \dots d^3\vec{r}_N e^{\beta \sum_{i>j} u(r_{ij})} \quad (7.3)$$

Mari kita lakukan integral terhadap momentum dulu. Antara momentum satu dengan lainnya tidak terkait satu dengan lainnya. Dengan demikian variabel momentum untuk masing-masing partikel merupakan variabel bebas. Oleh karena itu integral tersebut dapat dipisah sebagai berikut

$$\int \dots \int d^3\vec{p}_1 d^3\vec{p}_2 \dots d^3\vec{p}_N e^{\beta \sum_i p_i^2/2m} = \int e^{\beta p_1^2/2m} d^3\vec{p}_1 \int e^{\beta p_2^2/2m} d^3\vec{p}_2 \dots \int e^{\beta p_N^2/2m} d^3\vec{p}_N \quad (7.4)$$

Kita gunakan hubungan yang sudah sangat dikenal berikut ini

$$\int e^{\beta p_i^2/2m} d^3\vec{p}_i = \left(-\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3/2} = (2\pi m k T)^{3/2} \quad (7.5)$$

Dengan memasukkan persamaan (7.5) ke dalam (7.4) kita mendapatkan

$$\begin{aligned} \int \dots \int d^3\vec{p}_1 d^3\vec{p}_2 \dots d^3\vec{p}_N e^{\beta \sum_i p_i^2/2m} &= (2\pi m k T)^{3/2} (2\pi m k T)^{3/2} \dots (2\pi m k T)^{3/2} \\ &= (2\pi m k T)^{3N/2} \end{aligned} \quad (7.6)$$

\Oleh karena itu fungsi partisi kanonik menjadi

$$\begin{aligned}
Z_N &= \frac{1}{N!h^{3N}} (2\pi mkT)^{3N/2} \int \dots \int d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2 \dots d^3\vec{r}_N e^{\beta \sum_i \sum_{j>i} u(r_{ij})} \\
&= \frac{1}{N!} \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3N/2} \int \dots \int d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2 \dots d^3\vec{r}_N e^{\beta \sum_i \sum_{j>i} u(r_{ij})} \quad (7.6)
\end{aligned}$$

Selanjutnya dengan mendefinisikan $\lambda = \sqrt{h^2 / 2\pi mkT}$ kita dapat menulis persamaan (7.6) menjadi

$$Z_N = \frac{1}{N! \lambda^{3N}} \int \dots \int d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2 \dots d^3\vec{r}_N e^{\beta \sum_i \sum_{j>i} u(r_{ij})} \quad (7.7)$$

Setelah menentukan fungsi partisi kanonik maka kita dapat menentukan fungsi partisi grand kanonik menurut hubungan berikut ini

$$Z_G = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Z_N \quad (7.8)$$

dengan $z = e^{\mu/kT}$

7.2 Penurunan Fungsi Partisi

Mari terlebih dahulu kita tentukan fungsi partisi kanonik lebih rinci dengan metode ekspansi kluster. Kita kembali menulis sebagai berikut

$$e^{\beta \sum_i \sum_{j>i} u(r_{ij})} = \prod_i \prod_{j>i} e^{\beta u(r_{ij})} \quad (7.9)$$

Untuk mempermudah pembahasan kita kembali mendefinisikan fungsi $f(r_{ij})$ sebagai berikut

$$e^{\beta u(r_{ij})} = 1 + f(r_{ij}) \quad (7.10)$$

Dengan menggunakan persamaan (7.9) dan (7.10) kita mendapatkan hubungan berikut ini

$$\prod_i \prod_{j>i} e^{\beta u(r_{ij})} = \prod_i \prod_{j>i} (1 + f(r_{ij}))$$

Akibatnya, bagian integral pada persamaan (7.10) menjadi

$$\begin{aligned} \int \dots \int d^3 \vec{r}_1 \dots d^3 \vec{r}_N e^{\beta \sum_{i > j} u(r_{ij})} &= \prod_i \prod_{j > i} \int \dots \int d^3 \vec{r}_1 \dots d^3 \vec{r}_N (1 + f(r_{ij})) \\ &= \int \dots \int d^3 \vec{r}_1 \dots d^3 \vec{r}_N (1 + f_{12} + f_{13} + \dots + f_{12} f_{13} + \dots + f_{\alpha} f_{\beta} \dots f_{\eta} + \dots) \end{aligned} \quad (7.11)$$

dengan $\alpha, \beta, \dots, \eta$ adalah pasangan dua angka yang berbeda. Misal $\alpha = 12, \beta = 24$, dan seterusnya.

Tugas kita selanjutnya adalah menyelesaikan integral pada tiap suku persamaan (7.11). Suku pertama dalam tanda kurung hanya angka satu sehingga integralnya dapat dilakukan dengan mudah dan hasilnya adalah V^N . Suku-suku lainnya mengandung f_{ij} yang berupa satu unit atau perkalian sejumlah f_{ij} sehingga integral yang dilakukan lebih sulit.

Beberapa integral yang dapat dilakukan dengan mudah adalah

$$\int \dots \int d^3 \vec{r}_1 \dots d^3 \vec{r}_N = \int d^3 \vec{r}_1 \int d^3 \vec{r}_2 \dots \int d^3 \vec{r}_N = V^N \quad (7.12)$$

$$\begin{aligned} \int \dots \int f_{12} d^3 \vec{r}_1 d^3 \vec{r}_2 \dots d^3 \vec{r}_N &= \int d^3 \vec{r}_1 d^3 \vec{r}_2 f_{12} \int d^3 \vec{r}_3 \int d^3 \vec{r}_4 \dots \int d^3 \vec{r}_N \\ &= V^{N-2} \int d^3 \vec{r}_1 d^3 \vec{r}_2 f_{12} \end{aligned} \quad (7.13)$$

Kita kembali ingat bahwa $f_{12}(r_{12}) = f(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|)$. Untuk menyelesaikan integral di atas masri kita definisikan variabel baru berikut ini

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}$$

Dengan definisi tersebut maka $f(r_{12}) = f(r)$, $\vec{r}_1 = \vec{R} - \vec{r}/2$ dan $\vec{r}_2 = \vec{R} + \vec{r}/2$.

Transformasi elemen volume ke dalam variabel baru memenuhi persamaan

$$\int d^3 \vec{r}_1 d^3 \vec{r}_2 = J \int d^3 \vec{R} d^3 \vec{r}$$

Dengan J adalah Jacobian yang memenuhi

$$J = \begin{vmatrix} \partial \bar{r}_1 / \partial \bar{R} & \partial \bar{r}_1 / \partial \bar{r} \\ \partial \bar{r}_2 / \partial \bar{R} & \partial \bar{r}_2 / \partial \bar{r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1/2 \\ 1 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Jadi $\int d^3 \bar{r}_1 d^3 \bar{r}_2 = \int d^3 \bar{R} d^3 \bar{r}$. Persamaan (7.13) selanjutnya dapat ditulis

$$\begin{aligned} \int \dots \int f_{12} d^3 \bar{r}_1 d^3 \bar{r}_2 \dots d^3 \bar{r}_N &= V^{N-2} \int \int d^3 \bar{R} d^3 \bar{r} f(r) \\ &= V^{N-2} \int d^3 \bar{R} \int d^3 \bar{r} f(r) = V^{N-1} \int d^3 \bar{r} f(r) \end{aligned}$$

Tampak bahwa hasil integral tidak bergantung pada indeks. Jadi, berapa pun indeks yang muncul pada fungsi f maka nilai integral selalu sama. Jadi, secara umum

$$\int \dots \int f_{ij} d^3 \bar{r}_1 d^3 \bar{r}_2 \dots d^3 \bar{r}_N = V^{N-1} \int d^3 \bar{r} f(r) \quad (7.14)$$

Yang sulit kita hitung adalah integral yang memuat perkalian f_{ij} yang saling terkopel (tidak dapat diuraikan atas integral terpisah).

Perhatikan kembali uraian suku-suku dalam persamaan (7.11). Angka-angka yang muncul pada indeks maksimal berjumlah N angka. Sebagian suku hanya mengandung angka yang jumlahnya lebih sedikit daripada N . Sebagai contoh, jika dalam suku tersebut hanya ada $f_{12} f_{15}$ maka jumlah angka yang muncul hanya 3 angka. Jika dalam suku tersebut hanya ada $f_{12} f_{34} f_{56} f_{59}$ maka jumlah angka yang muncul hanya 7 angka.

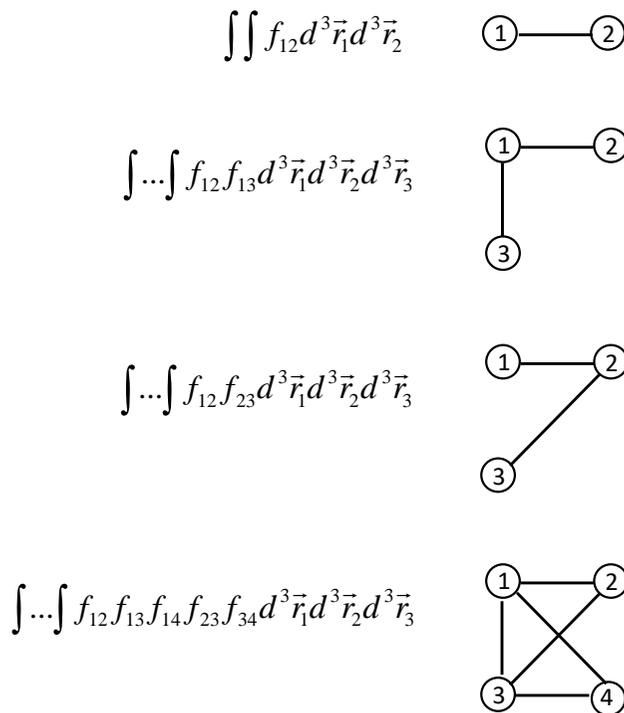
Sebagai bahan pembahasan mari kita lihat suku yang mengandung perkalian berikut ini $f_{12} f_{34} f_{35} f_{56} f_{78} f_{79}$. Koordinat yang tidak saling bebas dalam suku tersebut adalah \bar{r}_1 dan \bar{r}_2 (muncul dalam $f(r_{12})$), \bar{r}_3 , \bar{r}_4 , \bar{r}_5 dan \bar{r}_6 (muncul dalam $f(r_{34})f(r_{35})f(r_{56})$), dan \bar{r}_7 , \bar{r}_8 dan \bar{r}_9 (muncul dalam $f(r_{78})f(r_{79})$). Jadi, terdapat 9 koordinat posisi yang tidak saling bebas. Nilai integralnya dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} &\int \dots \int f_{12} f_{34} f_{35} f_{56} f_{78} f_{79} d^3 \bar{r}_1 d^3 \bar{r}_2 \dots d^3 \bar{r}_N \\ &= V^{N-9} \int \dots \int f_{12} f_{34} f_{35} f_{56} f_{78} f_{79} d^3 \bar{r}_1 d^3 \bar{r}_2 d^3 \bar{r}_3 d^3 \bar{r}_4 d^3 \bar{r}_5 d^3 \bar{r}_6 d^3 \bar{r}_7 d^3 \bar{r}_8 d^3 \bar{r}_9 \\ &= V^{N-9} \int \int f_{12} d^3 \bar{r}_1 d^3 \bar{r}_2 \int \dots \int f_{34} f_{35} f_{56} d^3 \bar{r}_3 d^3 \bar{r}_4 d^3 \bar{r}_5 d^3 \bar{r}_6 \int \dots \int f_{78} f_{79} d^3 \bar{r}_7 d^3 \bar{r}_8 d^3 \bar{r}_9 \end{aligned}$$

Grafik

Sekarang mari kita mendefinisikan besaran yang dinamakan grafik. Grafik adalah representasi lain dari bentuk integral. **Gambar 7.1** adalah contoh integral dan bentuk grafiknya. Grafik adalah kumpulan lingkaran-lingkaran yang dihubungkan oleh garis-garis. Tiap lingkaran diberi nomor dengan angka antara 1 sampai N . Tampak dalam **Gambar 7.1** bahwa jika dalam integral terdapat f_{ij} , maka dalam grafik lingkaran yang diberi angka i dan angka j terhubung dengan garis.

Selanjutnya, jika suku-suku dalam persamaan (7.11) ada indeks yang tidak muncul maka grafik definisikan sebagai sebuah lingkaran yang memiliki angka yang tidak muncul tersebut. Contohnya dapat dilihat pada **Gambar 7.2**. Pada persamaan yang pertama dan kedua dalam **Gambar 7.2** tidak ada f yang muncul sehingga grafik hanya berupa satu lingkaran. Lingkaran tersebut diberi angka sama dengan indeks pada $d^2\vec{r}$. Pada persamaan ketiga hanya f_{12} yang muncul sedangkan angka 3 tidak muncul. Maka yang diperoleh adalah perkalian grafik yang berupa dua lingkaran terhubung dan satu grafik yang hanya berupa sebuah lingkaran.



Gambar 7.1 Contoh integral dan representasinya dalam bentuk grafik.

$$\int d^3\vec{r}_1 \quad \textcircled{1}$$

$$\int \dots \int d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2 d^3\vec{r}_3 \quad \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \quad \textcircled{3}$$

$$\int \dots \int f_{12} d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2 d^3\vec{r}_3 \quad \textcircled{1} \text{---} \textcircled{2} \quad \textcircled{3}$$

Gambar 7.2 Jika anda angka yang tidak muncul dalam f maka grafiknya didibolkan sebagai sebuah lingkaran saja yang memiliki nomor angka yang tidak muncul tersebut.

Dari penjelasan di atas dapat kita tarik kesimpulan bahwa suku-suku dalam persamaan (7.11) selalu dapat dinyakan sebagai perkalian sejumlah grafik yang terdiri dari satu lingkaran, 2 lingkaran, 3 lingkaran, dan seterusnya. Grafik yang mengandung ℓ lingkaran yang dihubungkan oleh garis-garis kita sebut kluster- ℓ . Dalam satu suku penjumlahan pada persamaan (7.11) bisa terjadi kluster-1, kluster-10 atau kluster lainnya muncul beberapa kali. Sebaliknya bisa jadi kluster lainnya tidak pernah muncul. Sebagai contoh dapat dilihat pada ilustrasi berikut ini.

$$\int \dots \int f_{12} d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2 \dots d^3\vec{r}_N \quad \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \quad \textcircled{3} \quad \dots \quad \textcircled{N}$$

Pada ilustrasi di atas kluster-1 muncul sebanyak N kali sedangkan kluster-kluster lainnya tidak pernah muncul.

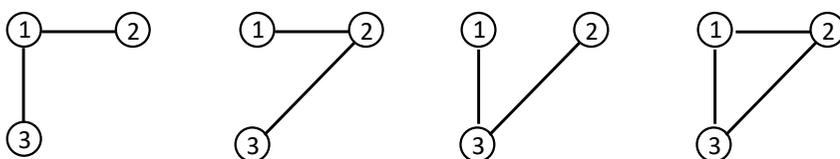
Misalkan pada satu suku dalam persamaan (7.11)

- kluster-1 muncul sebanyak m_1 kali;
- kluster-2 muncul sebanyak m_2 kali;
-
-
-
- kluster ℓ muncul sebanyak m_ℓ kali;
- dan seterusnya.

di mana m_ℓ dapat memiliki nilai antara 0 sampai N . Karena tiap lingkaran tidak boleh memiliki angka yang sama maka jumlah total lingkaran memenuhi persamaan

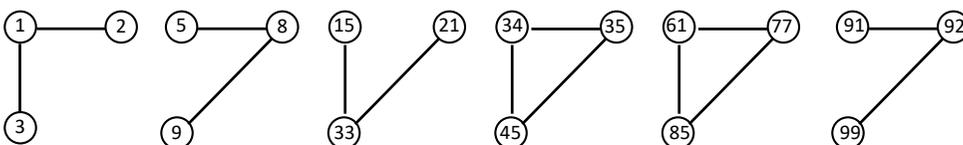
$$\sum_{\ell=0}^N \ell m_\ell = N \tag{7.15}$$

Misalkan salah satu suku dalam persamaan (7.11) mengandung komposisi kluster sebagai berikut $\{m_1, m_2, \dots, m_\ell, \dots, m_N\} = \{m_\ell\}$. Simbol ini menyatakan bahwa ada m_1 kluster-1, ada m_2 kluster 2, dan seterusnya. Tetapi, untuk kluster- ℓ tertentu, terdapat banyak sekali cara menghubungkan lingkaran-lingkaran dalam kluster tersebut. Sebagai contoh, untuk kluster-3, cara-cara menghubungkan lingkaran-lingkaran diilustrasikan pada **Gambar 7.3**.



Gambar 7.3 Empat cara menghubungkan lingkaran-lingkaran pada kluster-3.

Jadi untuk kluster-3 terdapat 4 cara menghubungkan lingkaran-lingkaran penyusunnya. Dengan demikian, jika jumlah kluster-3 ada 6 ($m_3 = 6$) maka kemungkinan-kemungkinan yang dapat terjadi diilustrasikan pada **Gambar 7.4**.



Gambar 7.4 Contoh kemungkinan-kemungkinan munculnya kluster-3 pada suku persamaan (7.11).

Tampak dari **Gambar 7.4** bahwa dapat terjadi sejumlah cara hubungan antar lingkaran yang muncul berkali-kali. Sebaliknya, dapat terjadi pula ada cara hubungan antar lingkaran yang tidak pernah muncul.

Yang perlu kita tentukan selanjutnya adalah jumlah cara menghubungkan semua kemungkinan kluster-kluster tersebut. Jumlah cara tersebutlah yang akan menentukan fungsi partisi yang selanjutnya akan digunakan untuk menurunkan besaran-besaran termodinamika.

Sekarang mari kita fokuskan pada satu susunan kluster yang disimbolkan dengan $\{m_\ell\}$. Dapat dibuktikan dengan mudah bahwa

$$\textcircled{1} = \textcircled{2} = \textcircled{3} = \dots = \textcircled{j}$$

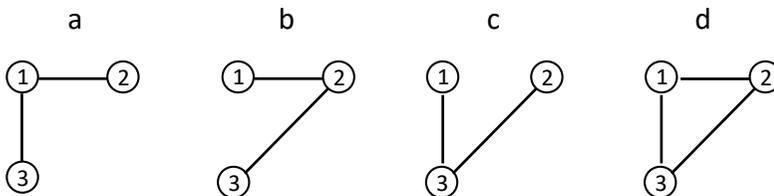
karena $\int d^3\vec{r}_1 = \int d^3\vec{r}_2 = \dots = \int d^3\vec{r}_j$. Dengan demikian jika terdapat m_1 buah kluster-1 maka suku dalam persamaan (7.11) hanya menghasilkan $[O]^{m_1}$. Selanjutnya, perhatikan kluster-2. Contohnya

$$\textcircled{3} \text{---} \textcircled{4} = \int \dots \int f(r_{34}) d^3\vec{r}_3 d^3\vec{r}_4 = \int d^3R \int f(r) d^3\vec{r} = V \int f(r) d^3\vec{r}$$

$$\textcircled{i} \text{---} \textcircled{j} = \int \dots \int f(r_{ij}) d^3\vec{r}_i d^3\vec{r}_j = \int d^3R \int f(r) d^3\vec{r} = V \int f(r) d^3\vec{r}$$

Artinya, berapa pun angka yang ada dalam dua lingkaran yang terhubung maka hasilnya selalu sama. Oleh karena itu jika di dalam salah satu suku dalam persamaan (7.11) terdapat m_2 kluster-2 maka perkaliannya menghasilkan $[O-O]^{m_2}$.

Untuk kluster-3 terdapat 4 jenis grafik yang muncul. Untuk sementara mari kita simbolkan grafik-grafik tersebut dengan a, b, c, dan d seperti pada **Gambar 7.5**.

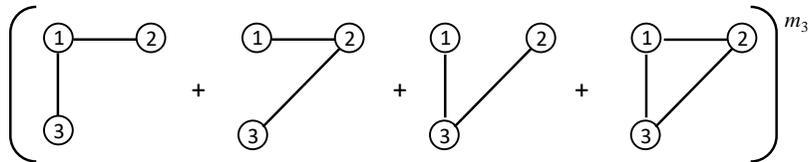


Gambar 7.5 Kita simbolkan grafik-grafik pada kluster-3 dengan huruf untuk mempermudah pemahaman.

Dengan demikian, grafik-grafik (kombinasi antar huruf) yang dapat muncul dalam m_3 buah kluster-3 adalah

$$\underbrace{\text{aaaa...aa}}_{m_3 \text{ kali}} + \underbrace{\text{aaaa...ab}}_{m_3 \text{ kali}} + \dots + \underbrace{\text{ab...bbbb}}_{m_3 \text{ kali}} + \underbrace{\text{bbbb...bb}}_{m_3 \text{ kali}}$$

Penjumlahan semua kombinasi di atas persis sama dengan $(a+b+c+d)^{m_3}$. Jadi kontribusi kluster-3 ke dalam suku penjumlahan pada persamaan (7.11) adalah



Sekarang mari kita perhatikan angka-angka yang diisi pada lingkaran-lingkaran grafik. Angka-angka yang menomori lingkaran pada tiap suku dapat dipertukarkan maka jumlah kemungkinan menjadi lebih banyak lagi. Akibatnya salah satu suku dalam persamaan (7.11) dapat ditulis sebagai jumlah suku-suku yang diperoleh dari hasil permutasi suku lainnya. Jadi jumlah tiap suku sama, namun satu suku adalah hasil permutasi nomor pada suku lainnya. Persamaan yang diperoleh adalah

$$S\{m_\ell\} = \sum_P [\text{O}]^{m_1} [\text{O}-\text{O}]^{m_2}$$

$$\times \left(\begin{array}{c} \text{①} \text{---} \text{②} \\ | \\ \text{③} \end{array} + \begin{array}{c} \text{①} \text{---} \text{②} \\ \diagdown \\ \text{③} \end{array} + \begin{array}{c} \text{①} \quad \text{②} \\ | \quad \diagdown \\ \text{③} \end{array} + \begin{array}{c} \text{①} \text{---} \text{②} \\ | \quad \diagdown \\ \text{③} \end{array} \right)^{m_3}$$

$$\times \left(\dots \right)^{m_4} \dots$$

(7.16)

di mana \sum_P menyatakan permutasi angka-angka yang menandai lingkaran (permutasi angka 1 sampai N).

Selanjutnya kita perlu menentukan $S\{m_\ell\}$ secara eksplisit. Karena yang kita permutasi ada N partikel maka jumlah suku pada persamaan (7.16) adalah $N!$ buah. Tetapi perlu diingat bahwa tidak semua permutasi menghasilkan susunan yang

berbeda. Contohnya kita lihat kluster-1 yang terdiri dari m_1 buah. Misalkan kluster-kluster tersebut sebagai berikut.



Tetapi, karena

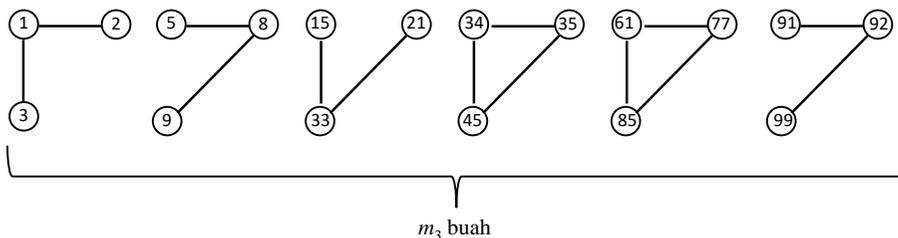
$$\textcircled{1} = \textcircled{2} = \textcircled{3} = \dots = \textcircled{m_1}$$

maka permutasi terhadap m_1 buah angka pada lingkaran-lingkaran tersebut tidak memberikan konfigurasi yang berbeda (karena angka yang dipertukarkan merupakan konstanta yang persis sama). Jumlah cara mempertukarkan m_1 angka adalah $m_1!$ cara. Jadi pada jumlah $N!$ harus dibagi dengan $m_1!$ untuk menghindari pengulangan permutasi yang tidak menghasilkan konfigurasi berbeda.

Alasan yang sama pun kita terapkan ketika akan membahas permutasi m_ℓ kluster- ℓ . Untuk menghindari pengulangan permutasi yang tidak menghasilkan konfigurasi berbeda maka $N!$ harus dibagi dengan $m_\ell!$. Jadi jumlah cara berbeda setelah membuang permutasi yang tidak menghasilkan konfigurasi berbeda akibat pertukaran kluster yang memiliki lingkaran yang sama jumlahnya menjadi

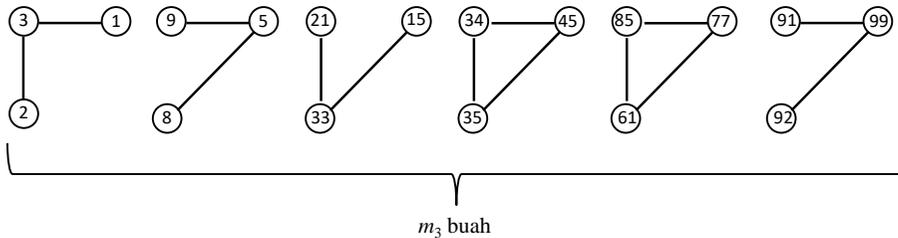
$$\frac{N!}{m_1!m_2!\dots m_\ell!\dots m_N!} \tag{7.17}$$

Selanjutnya perhatikan kluster yang mengandung beberapa lingkaran (misalnya kluster-3). Misalkan anggota kluster tersebut sebagai berikut.



Jika kita menukarkan angka-angka dalam satu grafik maka kita tidak menghasilkan konfigurasi yang berbeda. Penyebabnya adalah ketika dilakukan integral maka angka-angka tersebut akan hilang. Jadi, konfigurasi di bawah ini tidak berbeda dengan konfigurasi di atas. Pada konfigurasi di bawah angka-angka pada grafik

pertama dipertukarkan antar mereka, angka-angka pada grafik kedua dipertukarkan pada mereka, dan seterusnya.



Ketika kita permutasi angka 1, 2, dan 3 pada grafik pertama maka kita tidak menghasilkan konfigurasi baru. Jumlah cara permutasi 3 angka tersebut adalah $3!$. Ketika kita permutasi angka 5, 8, dan 9 pada grafik kedua maka kita pun tidak mendapatkan konfigurasi baru. Jumlah cara permutasi tersebut adalah $3!$. Dengan demikian total cara permutasi semua angka dalam kluster-3 adalah $(3!)^{m_3}$. Karena permutasi tersebut tidak menghasilkan konfigurasi baru maka pada jumlah cara yang dinyatakan dalam ungkapan (7.17) harus dibagi dengan $(3!)^{m_3}$ untuk membuang pengulangan yang sama. Hal yang sama berlaku pada kluster-kluster lainnya. Untuk kluster- ℓ jumlah cara permutasi yang harus dihilangkan adalah $(\ell!)^{m_\ell}$. Akhirnya, jumlah suku yang benar-benar hanya menghasilkan konfigurasi berbeda hanyalah

$$\frac{N!}{m_1!m_2!\dots m_\ell!\dots m_N!(1!)^{m_1}(2!)^{m_2}\dots(\ell!)^{m_\ell}\dots(N!)^{m_N}} \quad (7.18)$$

Jumlah yang diungkapkan (7.18) adalah jumlah suku penjumlahan yang berbeda dalam persamaan (7.16). Karena tiap grafik sejenis selalu menghasilkan nilai yang sama (berapa pun angka yang terkandung di dalamnya) maka nilai $S\{m_\ell\}$ persis sama dengan jumlah suku yang berbeda dikalikan dengan perkalian semua grafik yang muncul dalam persamaan (7.16). Akhirnya kita dapat simpulkan

$$S\{m_\ell\} = \frac{N!}{m_1!m_2!\dots m_\ell!\dots m_N!(1!)^{m_1}(2!)^{m_2}\dots(\ell!)^{m_\ell}\dots(N!)^{m_N}} \times [\text{O}]^{m_1} [\text{O}-\text{O}]^{m_2}$$

$$\times \left(\begin{array}{c} \text{①} \text{---} \text{②} \\ | \\ \text{③} \end{array} + \begin{array}{c} \text{①} \text{---} \text{②} \\ \diagdown \\ \text{③} \end{array} + \begin{array}{c} \text{①} \quad \text{②} \\ | \quad \diagup \\ \text{③} \end{array} + \begin{array}{c} \text{①} \text{---} \text{②} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{③} \end{array} \right)^{m_3}$$

$$\times \left(\dots \right)^{m_4} \dots$$

(7.19)

Tiap suku dalam persamaan (7.11) mengandung satu set $\{m_\ell\}$. Oleh karena itu jumlah untuk semua set $\{m_\ell\}$ yang mungkin adalah

$$\sum_{\{m_\ell\}} S\{m_\ell\}$$

Akhirnya kita dapatkan fungsi partisi kanonik sebagai

$$Z_N = \frac{1}{N! \lambda^{3N}} \sum_{\{m_\ell\}} S\{m_\ell\} \quad (7.20)$$

Seperti yang umum dilakukan hingga saat ini, mari kita definisikan integral kluster sebagai berikut

$$b_\ell(V, T) = \frac{1}{\ell! \lambda^{3\ell-3V}} \times (\text{jumlah semua kemungkinan kluster-}\ell) \quad (7.21)$$

Sebagai contoh

$$b_1(V, T) = \frac{1}{1! \lambda^{3 \times 1 - 3V}} [\text{O}] = \frac{1}{V} \int d^3\vec{r} = \frac{1}{V} \times V = 1$$

$$b_2(V, T) = \frac{1}{2! \lambda^{3 \times 2 - 3V}} [\text{O}-\text{O}] = \frac{1}{2! \lambda^3 V} \iint f(r_{12}) d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2$$

$$= \frac{1}{2! \lambda^3 V} \int d^3 \bar{R} \int f(r) d^3 \bar{r} = \frac{1}{2! \lambda^3} \int f(r) d^3 \bar{r}$$

Dengan definisi (7.21) maka kita dapat menulis

$$\begin{aligned} Z_N &= \frac{1}{N! \lambda^{3N}} \sum_{\{m_\ell\}} \frac{N!}{m_1! m_2! \dots m_N! (1!)^{m_1} (2!)^{m_2} \dots (N!)^{m_N}} \\ &\times (b_1! \lambda^{3 \times 1 - 3} V)^{m_1} (b_2! 2! \lambda^{3 \times 2 - 3} V)^{m_2} \dots (b_N! N! \lambda^{3 \times N - 3} V)^{m_N} \\ &= \frac{1}{\lambda^{3N}} \sum_{\{m_\ell\}} \left(\frac{b_1 V}{\lambda^3} \right)^{m_1} \lambda^{(3 \times 1) m_1} \left(\frac{b_2 V}{\lambda^3} \right)^{m_2} \lambda^{(3 \times 2) m_2} \\ &\quad \dots \left(\frac{b_\ell V}{\lambda^3} \right)^{m_\ell} \lambda^{(3 \times \ell) m_\ell} \dots \left(\frac{b_N V}{\lambda^3} \right)^{m_N} \lambda^{(3 \times N) m_N} \\ &= \frac{1}{\lambda^{3N}} \sum_{\{m_\ell\}} \prod_{\ell} \left(\frac{b_\ell V}{\lambda^3} \right)^{m_\ell} \prod_{\ell} \lambda^{(3 \times \ell) m_\ell} = \frac{1}{\lambda^{3N}} \sum_{\{m_\ell\}} \prod_{\ell} \left(\frac{b_\ell V}{\lambda^3} \right)^{m_\ell} \lambda^{3 \sum_{\ell} \ell m_\ell} \\ &= \frac{1}{\lambda^{3N}} \sum_{\{m_\ell\}} \prod_{\ell} \left(\frac{b_\ell V}{\lambda^3} \right)^{m_\ell} \lambda^{3N} = \sum_{\{m_\ell\}} \prod_{\ell} \left(\frac{b_\ell V}{\lambda^3} \right)^{m_\ell} \end{aligned} \quad (7.22)$$

Dari fungsi partisi kanonik kita mendapatkan fungsi grand partisi sebagai berikut

$$Z_G = \sum_{N=0}^{\infty} z^N \sum_{\{m_\ell\}} \prod_{\ell} \left(\frac{b_\ell V}{\lambda^3} \right)^{m_\ell} \quad (7.23)$$

Selanjutnya, karena $N = \sum_{\ell} \ell m_\ell$ maka $z^N = z^{\sum_{\ell} \ell m_\ell} = \prod_{\ell} z^{\ell m_\ell} = \prod_{\ell} (z^\ell)^{m_\ell}$ sehingga persamaan (7.23) dapat ditulis ulang menjadi

$$Z_G = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{m_\ell\}} \prod_{\ell} \left(\frac{b_\ell V}{\lambda^3} z^\ell \right)^{m_\ell} \quad (7.24)$$

Kita ingin lebih menyederhakan lagi persamaan (7.24). Karena N dapat memiliki nilai dari 0 sampai tak berhingga maka semua m_ℓ dapat memiliki nilai dari 0 sampai tak berhingga. Dengan demikian, fungsi grand partisi dapat ditulis ulang menjadi

$$\begin{aligned}
 Z_G &= \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \dots \sum_{m_\ell=0}^{\infty} \dots \sum_{m_N=0}^{\infty} \left(\frac{b_1 V}{\lambda^3} z^1 \right)^{m_1} \left(\frac{b_2 V}{\lambda^3} z^2 \right)^{m_2} \dots \left(\frac{b_\ell V}{\lambda^3} z^\ell \right)^{m_\ell} \dots \left(\frac{b_N V}{\lambda^3} z^N \right)^{m_N} \\
 &= \sum_{m_1=0}^{\infty} \left(\frac{b_1 V}{\lambda^3} z^1 \right)^{m_1} \sum_{m_2=0}^{\infty} \left(\frac{b_2 V}{\lambda^3} z^2 \right)^{m_2} \dots \sum_{m_\ell=0}^{\infty} \left(\frac{b_\ell V}{\lambda^3} z^\ell \right)^{m_\ell} \dots \sum_{m_N=0}^{\infty} \left(\frac{b_N V}{\lambda^3} z^N \right)^{m_N} \\
 &= \exp \left[\frac{b_1 V}{\lambda^3} z^1 \right] \exp \left[\frac{b_2 V}{\lambda^3} z^2 \right] \dots \exp \left[\frac{b_\ell V}{\lambda^3} z^\ell \right] \dots \exp \left[\frac{b_N V}{\lambda^3} z^N \right] = \exp \left[\sum_\ell \frac{b_\ell V}{\lambda^3} z^\ell \right] \quad (7.25)
 \end{aligned}$$

Dari persamaan (7.25) dengan mudah kita mendapatkan

$$\ln Z_G = \sum_\ell \frac{b_\ell V}{\lambda^3} z^\ell = \frac{V}{\lambda^3} \sum_\ell b_\ell z^\ell \quad (7.26)$$

Akhirnya kita dapatkan persamaan berikut ini

$$\frac{P}{kT} = \frac{1}{V} \ln Z_G = \frac{1}{\lambda^3} \sum_\ell b_\ell z^\ell \quad (7.27)$$

$$\begin{aligned}
 \bar{N} &= kT \left(\frac{\partial (\ln Z_G)}{\partial \mu} \right)_{v,T} = kT \frac{V}{\lambda^3} \frac{\partial}{\partial z} \sum_\ell b_\ell z^\ell \frac{\partial z}{\partial \mu} = kT \frac{V}{\lambda^3} \sum_\ell \ell b_\ell z^{\ell-1} (z/kT) \\
 &= \frac{V}{\lambda^3} \sum_\ell \ell b_\ell z^\ell
 \end{aligned}$$

atau

$$\frac{1}{v} = \frac{\bar{N}}{V} = \frac{1}{\lambda^3} \sum_\ell \ell b_\ell z^\ell \quad (7.28)$$

Persamaan (7.27) dan (7.28) merupakan landasan untuk mencari persamaan keadaan dalam metode ekspansi kluster. Yang dilakukan adalah mencari konstanta

b pada deret persamaan (7.27) dan (7.28). Konstanta tersebut dihitung dari integral fungsi potensial. Nilai konstanta sangat bergantung pada jenis interaksi antar atom/molekul gas.

Bab 8

MODEL ISING

Pada bab ini kita akan bahas salah satu topik yang sering dijumpai pada mekanika statistik, yaitu model Ising. Model ini pertama kali dikembangkan oleh Ising untuk menjelaskan sifat magnetik bahan dengan memandang bahan tersusun atas momen-momen magnetik yang tersusun secara teratur. Dalam perkembangan selanjutnya model ini diterapkan untuk sejumlah kasus yang kadangkala tidak ada hubungan langsung dengan kemagnetan.

Untuk memahami isi bab ini diperlukan kemampuan matematika yang agak tinggi. Mahasiswa perlu mempelajari lagi operasi diagonalisasi matriks, mencari trace matriks.

8.1 Formulasi Ising

Dalam model Ising, assembli dipandang sebagai susunan teratur dari N system pada posisi tetap. Penyusunan sistem-sistem tersebut membentuk kisi-kisi kristal. Bentuk kisi bisa berupa kisi linier (1D), bujur sangkar, persegi panjang, atau segitiga (2D), *simple cubic*, *face centered cubic*, *hexagonal*, dan lain-lain (3D). Tiap titik kisi berkaitan dengan salah satu dari dua keadaan yang dilambangkan dengan nilai +1 dan -1. Jika variabel yang menyatakan keadaan kisi ke- i adalah s_i maka s_i hanya boleh memiliki nilai -1 atau +1. Dalam bahan feromagnet, keadaan dengan $s_i = +1$ berkaitan dengan spin *up* dan keadaan dengan $s_i = -1$ berkaitan dengan spin *down*. Kumpulan $\{s_i\}$ menentukan keadaan assembli.

Misalkan energi interaksi keadaan ke- i dan ke- j adalah $-\varepsilon_{ij}$ dan energi interaksi antara keadaan ke- i dengan medan magnetik B adalah $-\mu B s_i$ maka energi assembli pada konfigurasi $\{s_i\}$ memenuhi

$$E\{s_i\} = -\sum_{i,j} \varepsilon_{ij} s_i s_j - \mu B \sum_i s_i \quad (8.1)$$

Jika dianggap bahwa hanya interaksi antara dua tetangga terdekat saja yang dominan, yaitu dua sistem yang berhubungan langsung, maka energi interaksi dapat ditulis

$$E\{s_i\} = -\sum_{\langle ij \rangle} \varepsilon_{ij} s_i s_j - \mu B \sum_i s_i \quad (8.2)$$

di mana simbol $\sum_{\langle ij \rangle}$ menyatakan penjumlahan dilakukan dengan memperhitungkan tetangga terdekat saja.

b) Jika dianggap bahwa interaksi antara dua tetangga terdekat adalah sama untuk semua tetangga, tidak bergantung pada lokasi di mana dua sistem terdekat berada maka $\varepsilon_{ij} = \varepsilon$ untuk semua i dan j . Dengan demikian kita bisa sederhanakan persamaan (8.2) menjadi

$$E\{s_i\} = -\varepsilon \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j - \mu B \sum_i s_i \quad (8.3)$$

Berapakah jumlah suku dalam penjumlahan di sebelah kiri persamaan (8.3)? Misalkan jumlah tetangga terdekat adalah γ . Untuk setiap nilai i ada sebanyak γ buah nilai j yang merupakan tetangga terdekat. Karena ada N buah indeks i maka jumlah indeks j yang menjadi tetangga terdekat adalah γN . Tetapi perhitungan semacam ini akan menyebabkan dua kali cacahan. Saat menghitung jumlah tetangga yang dimiliki spin dengan indeks i , maka spin dengan indeks j dihitung. Kemudian saat menghitung tetangga yang dimiliki sistem dengan indeks j , maka sistem dengan indeks i juga diperhitungkan. Dengan demikian, jumlah suku sebenarnya dalam penjumlahan di atas hanyalah $\gamma N/2$. Contoh nilai γ untuk beberapa penyusunan adalah:

- kisi bujur sangkar, $\gamma = 4$;
- kisi *simple cubic*, $\gamma = 6$;
- kisi *body centered cubic*, $\gamma = 8$;
- kisi *hexagonal closed packing*, $\gamma = 12$.

Sekarang kita tinjau kasus khusus, yaitu untuk $\varepsilon > 0$ yang berkaitan dengan bahan ferromagnetik. Fungsi partisi adalah

$$Z(B, T) = \sum_{s_1} \sum_{s_2} \dots \sum_{s_N} \exp[\beta E\{s_i\}] \quad (8.4)$$

Pada persamaan (8.4) tiap variabel s_i mengambil nilai -1 dan +1. Karena ada N buah tanda penjumlahan maka jumlah suku dalam penjumlahan fungsi partisi adalah 2^N buah. Energi bebas helmholtz diperoleh langsung dari fungsi partisi melalui persamaan,

$$F(B,T) = -kT \ln Z(B,T) \quad (8.5)$$

Ada cara lain untuk menentukan fungsi partisi secara lebih mudah. Misalkan N_+ adalah jumlah spin *up* dan $N_- = N - N_+$ adalah jumlah spin *down*. Akan muncul tiga jenis pasangan antar spin, yaitu *up-up* ($++$), *down-down* ($--$) dan *up-down* ($+-$). Pasangan ($--$) dan ($++$) menyumbang energi yang sama besarnya, sedangkan pasangan ($+-$) menyumbang energi yang berlawanan tanda. Energi total assembli dapat ditentukan dengan menentukan jumlah pasangan ($--$), ($++$), dan ($+-$). Misalkan jumlah pasangan-pasangan yang adalah

Pasangan ($++$): N_{++}

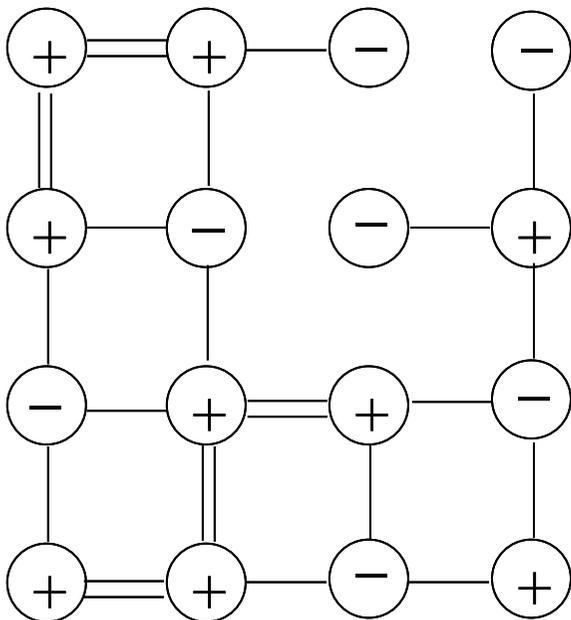
Pasangan ($--$): N_{--}

Pasangan ($+-$): N_{+-}

Untuk menentukan jumlah masing-masing pasangan tersebut, mari kita lihat skema pada **Gambar 8.1**:

- tiap bertemu satu spin *up*, kita tarik garis ke tetangga terdekat (ada γ buah garis yang ditarik);
- tiap ketemu satu spin *down* kita tidak membuat garis ke tetangga terdekatnya;
- akibatnya, pasangan *up-up* akan dihubungkan oleh dua garis;
- pasangan *up-down* dihubungkan oleh satu garis;
- pasangan *down-down* tidak dihubungkan oleh garis;
- karena tiap satu spin *up* menghasilkan γ buah garis maka jumlah garis yang dibuat adalah γN_+ . Garis tersebut akan terbagi menjadi dua buah penghubung *up-up* dan satu buah penghubung *up-down*. Jadi akan terpenuhi hubungan

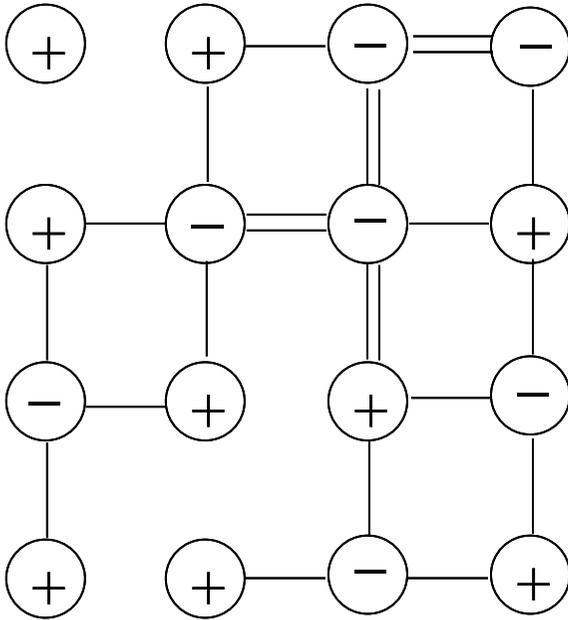
$$\gamma N_+ = 2N_{++} + N_{+-} \quad (8.6)$$



Gambar 8.1 Skema menentukan jumlahan pasangan spin up dan down dengan menarik satu garis keluar dari spin up dan tidak menarik garis keluar dari spin down.

Selanjutnya kita balik aturan penggambaran di atas dengan aturan seperti diilustrasikan pada **Gambar 8.2**:

- tiap ketemu satu spin *down*, kita tarik garis ke tetangga terdekat (ada γ garis yang dibuat);
- tiap ketemu satu spin *up* kita tidak membuat garis ke tetangga terdekatnya;
- akibatnya, pasangan *down-down* akan dihubungkan oleh dua garis;
- pasangan *up-down* dihubungkan oleh satu garis;
- pasangan *up-up* tidak dihubungkan oleh garis;
- karena tiap satu spin *down* menghasilkan γ buah garis (jumlah tetangga terdekat) maka jumlah garis yang dibuat adalah γN . Garis tersebut akan terbagi menjadi dua buah penghubung *down-down* dan satu buah penghubung *up-down*. Jadi akan terpenuhi hubungan.



Gambar 8.2 Skema menentukan jumlahan pasangan spin *up* dan *down* dengan menarik satu garis keluar dari spin *down* dan tidak menarik garis keluar dari spin *up*.

$$\gamma N_- = 2N_{--} + N_{+-} \quad (8.7)$$

Di samping itu karena jumlah total spin adalah N maka

$$N_+ + N_- = N \quad (8.8)$$

Dari tiga persamaan di atas kita dapatkan persamaan berikut ini

$$N_{+-} = \gamma N_+ - 2N_{++} \quad (8.9)$$

$$N_- = N - N_+ \quad (8.10)$$

$$N_{--} = \frac{\gamma}{2} N + N_{++} - \gamma N_+ \quad (8.11)$$

$$\sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j = N_{++} + N_{--} - N_{+-} = 4N_{++} - 2\gamma N_+ + \frac{\gamma}{2} N \quad (8.12)$$

$$\sum_i s_i = N_+ - N_- = 2N_+ - N \quad (8.13)$$

Dengan demikian, energi assembli dapat ditulis menjadi

$$E(N_+, N_{++}) = -4\varepsilon N_{++} + 2(\varepsilon\gamma - \mu B)N_+ - \left(\frac{1}{2} \varepsilon\gamma - \mu B \right) N \quad (8.14)$$

Fungsi partisi selanjutnya dapat ditulis

$$e^{\beta A(B,T)} = e^{-\beta N(\varepsilon\gamma/2 - \mu B)} \sum_{N_+=0}^N e^{2\beta(\varepsilon\gamma - \mu B)N_+} \sum_{N_{++}} g(N_+, N_{++}) e^{-4\beta\varepsilon N_{++}} \quad (8.15)$$

di mana $g(N_+, N_{++})$ adalah jumlah konfigurasi yang berkaitan dengan N_+ dan N_{++} tertentu.

Penjumlahan di atas sangat sulit untuk diselesaikan. Penjumlahan baru dapat dilakukan jika kita mengetahui bentuk eksplisit dari $g(N_+, N_{++})$. Yang dapat dilakukan sekarang adalah melakukan sejumlah pendekatan. Kita akan membahas sejumlah aproksimasi yang sudah diperkenalkan orang sejak lama.

8.2 Aproksimasi Bragg-Williams

Tampak pada fungsi partisi persamaan (8.15) bahwa energi assembli tidak bergantung secara eksplisit pada distribusi spin *up* dan spin *down*, tetapi hanya bergantung pada berapa jumlah spin *up* dan berapa pasangan spin *up-up*. Di mana letak spin *up* tersebut tidak menentukan energi konfigurasi. Di sini kita perkenalkan dua buah besaran, yaitu N_+/N dan $N_{++}/(\gamma N/2)$. Perhitungan besaran pertama akan memperhatikan seluruh lokasi dalam assembli, yaitu menghitung semua spin *up* dalam seluruh ruang assembli. Besaran tersebut mengukur keteraturan munculnya spin *up* pada seluruh ruang dalam assembli. Besaran tersebut sering dinamakan *long-range order*. Sebaliknya, besaran kedua hanya mempertimbangkan pasangan-pasangan tetangga terdekat. Besaran tersebut merepresentasikan keteraturan lokal, yaitu bagaimana terbentuknya pasangan spin *up-up* pada wilayah yang sangat kecil, yaitu tatangga terdekat. Oleh karena itu besaran tersebut dinamakan *short-range order*.

Kita definisikan parameter *long-range order*, L dan *short-range order*, σ , sebagai berikut

$$\frac{N_+}{N} = \frac{1}{2}(L+1) \quad (-1 \leq L \leq +1) \quad (8.16)$$

$$\frac{N_{++}}{(\gamma/2)N} = \frac{1}{2}(\sigma+1) \quad (-1 \leq \sigma \leq +1) \quad (8.17)$$

Nilai N_+ bervariasi dari 0 sampai N . Jika $N_+ = 0$ maka $L = -1$. Jika $N_+ = N$ maka $L = +1$. Jadi jangkauan nilai L memenuhi $-1 \leq L \leq 1$. Nilai N_{++} paling kecil adalah 0 (tidak ada pasangan spin up-up). Pada kondisi ini $\sigma = -1$. Jumlah maksimum pasangan yang dapat terbentuk adalah $\gamma N/2$. Dengan demikian nilai maksimum N_{++} adalah $\gamma N/2$ dan pada kondisi ini $\sigma = +1$. Jadi jangkauan nilai σ adalah $-1 \leq \sigma \leq 1$. Dengan pengenalan dua parameter tersebut maka kita peroleh

$$\sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j = (\gamma/2)N(2\sigma - 2L + 1) \quad (8.18)$$

$$\sum_i s_i = NL \quad (8.19)$$

Substitusi ke dalam persamaan (8.14) diperoleh energi rata-rata per spin

$$\frac{E}{N} = -(\varepsilon\gamma/2)(2\sigma - 2L + 1) - \mu BL \quad (8.20)$$

Menurut aproksimasi Bragg-Williams, terbentuknya *short-range order* adalah akibat dari *long-range order*. Dengan demikian ada keterkaitan langsung antara *short-range order* dan *long-range order*. Keterkaitan tersebut adalah

$$\frac{N_{++}}{\gamma N/2} = \left(\frac{N_+}{N} \right)^2 \quad (8.21)$$

Dengan aproksimasi ini maka

$$\frac{1}{2}(\sigma+1) = \left[\frac{1}{2}(L+1) \right]^2$$

atau

$$\sigma = \frac{1}{2}(L+1)^2 - 1 \quad (8.22)$$

Substitusi (8.22) ke dalam (8.20) diperoleh energi rata-rata per spin menjadi

$$\frac{E}{N} = -(\varepsilon\gamma/2)L^2 - \mu BL \quad (8.23)$$

Selanjutnya fungsi partisi menjadi

$$Z(B, T) = \sum_{\{s_i\}} e^{-\beta N(\varepsilon\gamma L^2/2 + \mu BL)} \quad (8.24)$$

Penjumlahan terhadap $\{s_i\}$ dapat diganti dengan penjumlahan terhadap L dari -1 sampai +1. Nilai L ditentukan oleh N_+ . Jumlah keadaan yang berkaitan dengan satu nilai L sama dengan jumlah cara mengambil N_+ dari sejumlah N spin yang tersedia. Jumlah cara tersebut adalah

$$\frac{N!}{N_+!(N-N_+)!} = \frac{N!}{[N(1+L)/2]![N(1-L)/2]!}$$

Dengan demikian,

$$Z(B, T) = \sum_{L=-1}^{+1} \frac{N!}{[N(1+L)/2]![N(1-L)/2]!} e^{-\beta N(\varepsilon\gamma L^2/2 + \mu BL)} \quad (8.25)$$

Jika dijumpai penjumlahan seperti pada persamaan (8.25) maka akan ada satu suku yang memiliki nilai sangat dominan. Dengan adanya suku yang sangat dominan tersebut maka nilai suku-suku lain dapat diabaikan. Bahkan, jumlah semua suku-suku lainnya masih lebih kecil daripada nilai satu suku yang dominan tersebut. Dengan demikian penjumlahan pada persamaan (8.25) dapat didekati dengan nilai suku dominan saja. Misalkan suku yang memiliki nilai sangat dominan tersebut berkaitan dengan $L = \bar{L}$, maka kita dapat melakukan aproksimasi sebagai berikut,

$$Z(B, T) \approx \frac{N!}{[N(1+\bar{L})/2]![N(1-\bar{L})/2]!} e^{-\beta N(\varepsilon\gamma \bar{L}^2/2 + \mu B\bar{L})}$$

atau

$$\ln Z(B, T) \approx \ln \frac{N!}{[N(1+\bar{L})/2]![N(1-\bar{L})/2]!} e^{-\beta N(\varepsilon\bar{L}^2/2 + B\bar{L})} \quad (8.26)$$

Kemudian kita lakukan aproksimasi logaritma suku faktorial dengan aproksimasi Stirling. Dengan aproksimasi tersebut maka persamaan (8.26) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \ln Z(B, T) \approx & -\beta \left(\frac{\varepsilon\bar{L}^2}{2} + \mu B\bar{L} \right) - \frac{1+\bar{L}}{2} \ln \left(\frac{1+\bar{L}}{2} \right) \\ & - \frac{1-\bar{L}}{2} \ln \left(\frac{1-\bar{L}}{2} \right) + \frac{\ln N!}{N} \end{aligned} \quad (8.27)$$

Karena \bar{L} memberikan nilai maksimum pada fungsi partisi maka turunan fungsi partisi pada nilai \bar{L} harus nol, atau

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{L}} \frac{1}{N} \ln Z(B, T) \\ \approx \frac{\partial}{\partial \bar{L}} \left[-\beta \left(\frac{\varepsilon\bar{L}^2}{2} + \mu B\bar{L} \right) - \frac{1+\bar{L}}{2} \ln \left(\frac{1+\bar{L}}{2} \right) - \frac{1-\bar{L}}{2} \ln \left(\frac{1-\bar{L}}{2} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

Diferensial di atas memberikan solusi

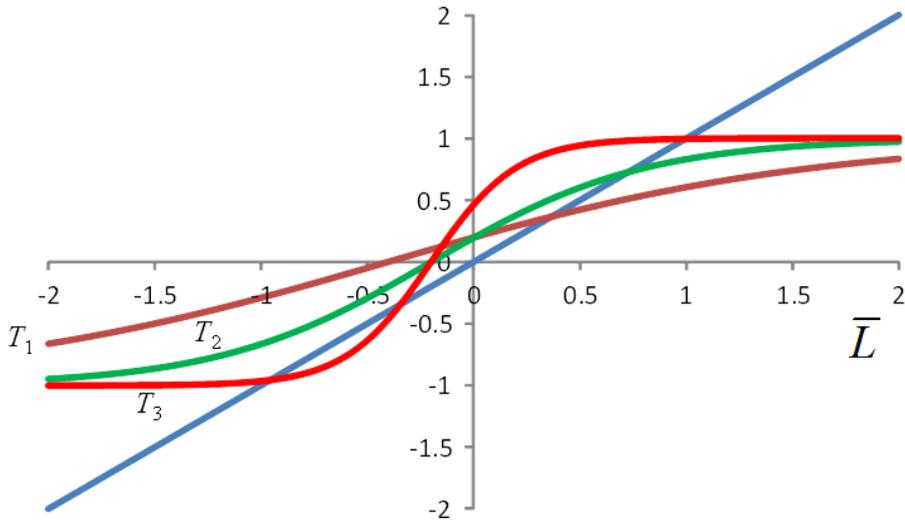
$$\ln \frac{1-L}{1+L} = -2\beta\mu - 2\beta\varepsilon\bar{L}$$

atau

$$\bar{L} = \tanh \left(\frac{\mu B}{kT} + \frac{\varepsilon\bar{L}}{kT} \right) \quad (8.28)$$

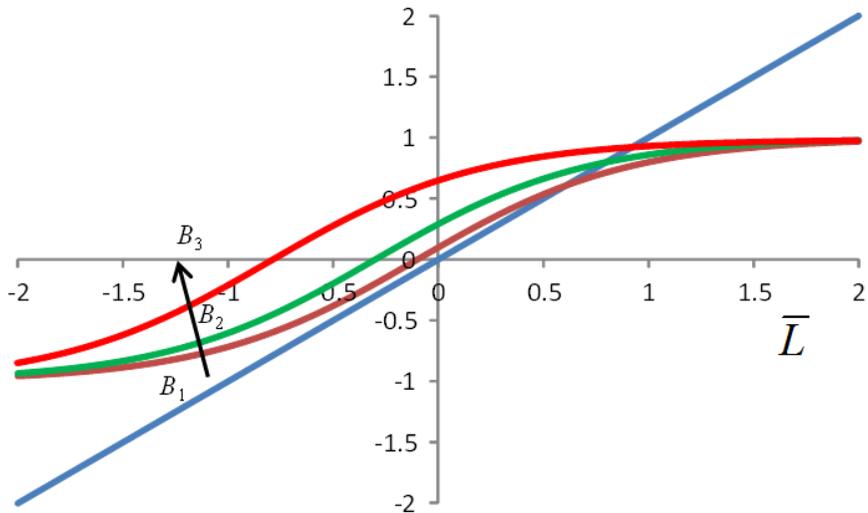
Solusi persamaan (8.28) dapat diperoleh dengan metode grafik. Caranya adalah membuat grafik $y_1 = \bar{L}$ dan $y_2 = \tanh(\mu B/kT + \varepsilon\bar{L}/kT)$. Perpotongan dua grafik tersebut merupakan solusi untuk \bar{L} . **Gambar 8.3** adalah grafik $y_2 = \tanh(\mu B/kT + \varepsilon\bar{L}/kT)$ pada tiga suhu yang berbeda yaitu T_1 , T_2 , dan T_3 . Kita menggunakan $T_2 = T_1/2$ dan $T_3 = T_1/5$. Solusi yang didapat adalah pada nilai $\bar{L} > 0$.

Tampak bahwa makin rendah suhu maka nilai \bar{L} makin tinggi dan mendekati satu. Ketika $T \rightarrow 0$ maka solusinya adalah $\bar{L} = 1$. Ini adalah kondisi di mana spin magnet mengarah sempurna ke satu arah.



Gambar 8.3 Kurva $y_1 = \bar{L}$ (garis lurus warna biru) dan $y_2 = \tanh(\mu B / kT + \epsilon \gamma \bar{L} / kT)$ (tiga kurva lengkung) sebagai fungsi \bar{L} pada berbagai nilai suhu. Sebagai ilustrasi, pada gambar tersebut kita menggunakan $T_2 = T_1/2$ dan $T_3 = T_1/5$, sedangkan medan magnetik dibuat tetap. Titik potong garis lurus dan kurva lengkung merupakan solusi untuk \bar{L} . Tampak bahwa suhu yang berbeda memberikan \bar{L} yang berbeda. Makin rendah suhu maka \bar{L} makin menuju ke nilai satu. Ini menunjukkan bahwa makin rendah suhu maka spin makin mengarah ke satu arah. Makin rendah suhu maka agitasi termal spin makin kecil sehingga spin makin mudah diarahkan oleh medan magnet menuju arah yang sama.

Gambar 8.4 adalah penentuan solusi persamaan (8.28) ketika besar medan magnet diubah-ubah. Kita menggunakan tiga nilai medan, B_1 , B_2 , dan B_3 di mana $B_2 = 3B_1$ dan $B_3 = 8B_1$. Tampak bahwa makin besar medan maka solusi untuk \bar{L} makin besar dan menuju ke satu.



Gambar 8.4 Kurva $y_1 = \bar{L}$ (garis lurus warna biru) dan $y_2 = \tanh(\mu B/kT + \epsilon \gamma \bar{L}/kT)$ (tiga kurva lengkung) sebagai fungsi \bar{L} pada berbagai kuat medan magneti. Sebagai ilustrasi, pada gambar tersebut kita menggunakan $B_2 = 3B_1$ dan $B_3 = 8B_1$, sedangkan suhu dibuat tetap. Titik potong garis lurus dan kurva lengkung merupakan solusi untuk \bar{L} . Tampak bahwa medan magnet yang berbeda memberikan \bar{L} yang berbeda. Makin besar medan magnet maka \bar{L} makin menuju ke nilai satu. Ini menunjukkan bahwa makin besar medan magnet maka spin makin mengarah ke satu arah. Medan magnet yang besar memaksa makin banyak spin untuk mengambil arah yang sama dengan arah medan.

Kita periksa kasus khusus ketika medan yang diterapkan nol (tidak ada medan yang diterapkan). Pada kondisi tersebut persamaan (8.28) menjadi

$$\bar{L} = \tanh\left(\frac{\epsilon \gamma \bar{L}}{kT}\right) \quad (8.29)$$

Persamaan (8.29) memiliki dua jenis solusi yang bergantung pada perbandingan energi interaksi antar spin dengan energi termal. Dua jenis solusi untuk \bar{L} adalah

$$\bar{L} = \begin{cases} 0 & , \frac{\varepsilon\gamma}{kT} < 1 \\ \pm L_o & , \frac{\varepsilon\gamma}{kT} > 1 \end{cases} \quad (8.30)$$

Nilai \bar{L}_o dapat diperoleh dengan metode grafik seperti diuraikan di atas.

Persamaan (8.30) atas menginformasikan bahwa jika energi interaksi yang dialami spin lebih kecil daripada energi termal maka solusi yang ada hanyalah $\bar{L} = 0$. Nilai ini menunjukkan bahwa jumlah spin *up* persis sama dengan spin *down*. Artinya, spin mengambil arah random. Tarikan akibat interaksi antar spin (yang cenderung membuat spin mengambil satu arah) tidak cukup kuat mengimbangi energi termal (cenderung membuat arah spin acak). Sebaliknya, jika energi interaksi antar spin lebih besar daripada energi termal maka lebih banyak spin berorientasi ke satu arah. Energi ikatan antar spin (yang cenderung mengarahkan spin) lebih besar daripada energi termal yang cenderung mengacaukan arah spin,

Dengan mendefinisikan $\varepsilon\gamma/k = T_c$, di mana T_c dinamakan suhu kritis maka

$$\bar{L} = \begin{cases} 0 & , T > T_c \\ \pm L_o & , T < T_c \end{cases} \quad (8.31)$$

Jadi, selama suhu assembli lebih besar daripada suhu kritis maka tidak ada keteraturan spin. Spin menunjukkan keteraturan pada suhu di bawah suhu kritis. Makin jauh suhu assembli di bawah suhu kritis maka keteraturan makin tinggi.

8.3 Aproksimasi Bethe-Pierls

Salah satu langkah yang cukup drastis dalam aproksimasi Bragg-Williams adalah melakukan pendekatan

$$\frac{N_{++}}{\gamma N / 2} = \left(\frac{N_+}{N} \right)^2$$

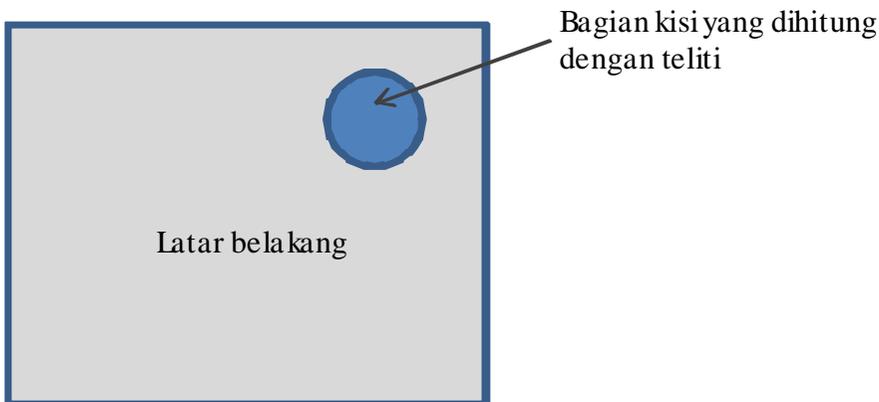
Pendekatan ini menyatakan bahwa terbentuknya pasangan spin up-up ditentukan oleh jumlah titik yang memiliki keadaan spin up. Pendekatan ini cukup kasar, seperti dapat dilihat pada **Gambar 8.5**. Pada gambar kiri dan kanan, N_+ sama banyaknya sehingga $(N_+/N)^2$ juga sama. Tetapi N_{++} pada gambar kiri lebih banyak daripada pada gambar kanan sehingga $N_{++}/(\gamma N/2)$ pada gambar kiri lebih besar nilainya. Ini menunjukkan bahwa aproksimasi Bragg-Williams masih sangat kasar.

-	-	-	-		+	-	+	-
+	+	+	-		-	+	-	+
+	+	+	-		-	-	+	-
+	+	+	-		+	-	+	-
-	-	-	-		-	+	-	+

Gambar 8.5 Ilustrasi yang memperlihatkan bahwa aproksimasi Bragg-Williams masih kurang teliti. Walaupun fraksi spin *up* (N_+/N) sama pada dua gambar namun jumlah pasangan spin *up-up* ($N_{++}/(\gamma N/2)$) tidak sama pada dua gambar. Dengan demikian tidak selalu berlaku bahwa $N_{++}/(\gamma N/2) = (N_+/N)^2$.

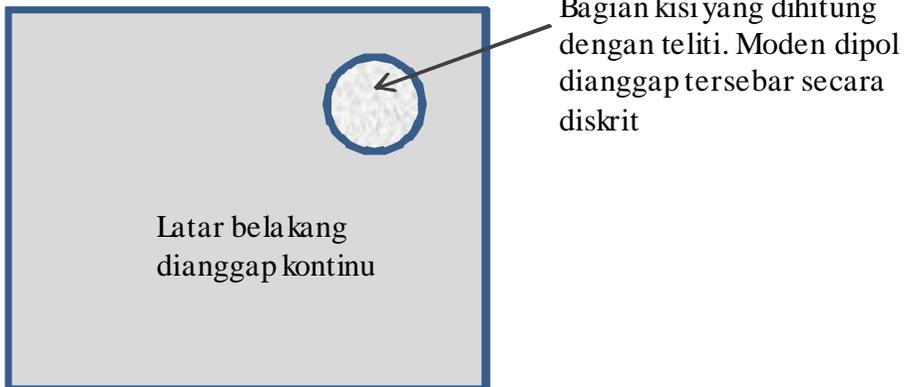
Aproksimasi Bethe-Pierls memperbaiki ketelitian aproksimasi Bragg-Williams. Langkah yang diterapkan sebagai berikut.

- a. mengambil satu bagian kecil saja dari kisi besar untuk dianalisis lebih detail;
- b. menghitung secara eksak pembentukan pasangan spin dalam bagian kecil tersebut;
- c. sisa kisi lainnya (sebagian besar) dipandang sebagai latar belakang.

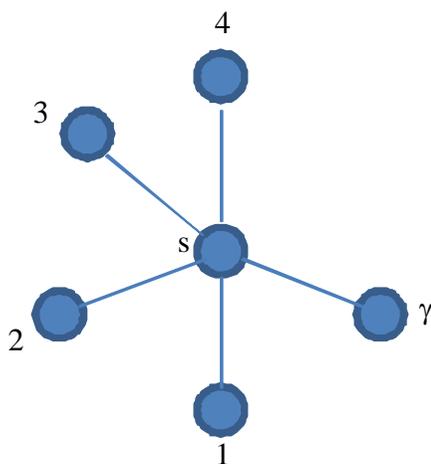


Langkah ini sangat mirip dengan saat menghitung medan listrik polarisasi dalam bahan dielektrik dengan menggunakan metode Lorentz.

Sebagian kecil bahan dielektrik dipilih. Momen dipol dalam bagian yang dipilih tersebut dipandang tersusun secara diskrit. Sisanya adalah latar belakang yang dipandang sebagai medium kontinu.



Untuk memudahkan penerapan aproksimasi Bethe-Pierls, kita tinjau kasus khusus di mana medan magnet luar nol. Untuk memulai perumusan tersebut, mari kita lihat sebuah titik kisi dengan keadaan spin s . Keadaan spin s memiliki dua kemungkinan nilai, yaitu $s = +1$ untuk spin *up* dan $s = -1$ untuk spin *down*. Titik kisi tersebut dihubungkan dengan γ tetangga terdekat.



Misalkan dari γ tetangga terdekat ada n buah yang memiliki spin *up* dan $\gamma-n$ buah yang memiliki spin *down*. Selanjutnya kita definisikan

$P(s,n)$ = probabilitas menemukan n tetangga terdekat dengan spin *up* dan $\gamma-n$ buah tetangga terdekat dengan spin *down* jika keadaan kisi di pusat adalah s .

Jadi,

- $P(+1,n)$ = probabilitas menemukan n pasangan (++) dan $\gamma-n$ pasangan (+-)
- $P(-1,n)$ = probabilitas menemukan n pasangan (-+) dan $\gamma-n$ pasangan (--)
- Pada kondisi $P(+1,n)$ energi yang dimiliki adalah

$$E(+1,n) = -n \times \varepsilon - (\gamma - n) \times (-\varepsilon) = -(2n - \gamma)\varepsilon \quad (8.32)$$

- Pada kondisi $P(-1,n)$ energi material adalah

$$E(-1,n) = -n \times (-\varepsilon) - (\gamma - n) \times (+\varepsilon) = -(\gamma - 2n)\varepsilon \quad (8.33)$$

- Jumlah cara menemukan n spin *up* dari γ tetangga terdekat adalah

$$\frac{\gamma!}{n!(\gamma - n)!} = \binom{\gamma}{n} \quad (8.34)$$

- Dengan demikian, kita dapat menulis probabilitas $P(+1,n)$ dan $P(-1,n)$ sebagai berikut

$$P(+1,n) \propto \binom{\gamma}{n} e^{-E(+1,n)/kT} \quad (8.35)$$

$$P(-1,n) \propto \binom{\gamma}{n} e^{-E(-1,n)/kT} \quad (8.36)$$

- Kita mengubah tanda kesebandingan dengan tanda sama dengan dengan memperkenalkan faktor pengali z^n/q sehingga

$$P(+1,n) = \frac{z^n}{q} \binom{\gamma}{n} e^{-\beta(2n-\gamma)\varepsilon} \quad (8.37)$$

$$P(-1, n) = \frac{z^n}{q} \binom{\gamma}{n} e^{-\beta(\gamma-2n)\varepsilon} \quad (8.38)$$

Pada persamaan-persamaan di atas q adalah bilangan penormalisasi sedangkan z^n adalah parameter yang memperhitungkan efek latar belakang.

Perhatikan penjelasan berikut ini.

$\sum_{n=0}^{\gamma} P(+1, n) = \text{probabilitas menemukan titik kisi di tengah memiliki spin up untuk semua kemungkinan spin tetangga terdekatnya.}$

$\sum_{n=0}^{\gamma} P(-1, n) = \text{probabilitas menemukan titik kisi di tengah memiliki spin down untuk semua kemungkinan spin tetangga terdekatnya.}$

Dari dua definisi tersebut dapat kita tarik kesimpulan bahwa

$\sum_{n=0}^{\gamma} P(+1, n) + \sum_{n=0}^{\gamma} P(-1, n) = \text{probabilitas menemukan titik kisi di tengah memiliki spin apa saja (apakah up atau down) untuk semua kemungkinan spin tetangga terdekatnya. Nilai tersebut jelas sama dengan satu.}$

Dengan demikian

$$\sum_{n=0}^{\gamma} P(+1, n) + \sum_{n=0}^{\gamma} P(-1, n) = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\gamma} \frac{z^n}{q} \binom{\gamma}{n} e^{-\beta(2n-\gamma)\varepsilon} + \sum_{n=0}^{\gamma} \frac{z^n}{q} \binom{\gamma}{n} e^{\beta(2n-\gamma)\varepsilon} = 1$$

yang dapat disusun ulang menjadi

$$q = \sum_{n=0}^{\gamma} \binom{\gamma}{n} e^{-2\beta\varepsilon n} z^n e^{\beta\gamma\varepsilon} + \sum_{n=0}^{\gamma} \binom{\gamma}{n} e^{2\beta\varepsilon n} z^n e^{-\beta\gamma\varepsilon}$$

$$= e^{\beta\gamma\varepsilon} \sum_{n=0}^{\gamma} \binom{\gamma}{n} (e^{-2\beta\varepsilon} z)^n + e^{-\beta\gamma\varepsilon} \sum_{n=0}^{\gamma} \binom{\gamma}{n} (e^{2\beta\varepsilon} z)^n$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\beta\gamma\epsilon} \left(1 + ze^{-2\beta\epsilon}\right)^\gamma + e^{-\beta\gamma\epsilon} \left(1 + ze^{2\beta\epsilon}\right)^\gamma \\
&= \left(e^{\beta\epsilon} + ze^{-\beta\epsilon}\right)^\gamma + \left(e^{-\beta\epsilon} + ze^{\beta\epsilon}\right)^\gamma
\end{aligned} \tag{8.39}$$

Dari pernyataan bahwa

$\sum_{n=0}^{\gamma} P(+1, n)$ = probabilitas menemukan titik kisi di tengah memiliki spin up untuk semua kemungkinan spin tetangga terdekatnya

maka jelaslah bahwa

$$\sum_{n=0}^{\gamma} P(+1, n) = \frac{N_+}{N} = \frac{1+L}{2} \tag{8.40}$$

Dari definisi

$P(+1, n)$ = probabilitas menemukan n pasangan $(++)$ dan $\gamma - n$ pasangan $(+-)$

maka kita dapatkan

$nP(+1, n)$ = jumlah spin up-up jika kisi di tengah memiliki spin up;
 $(n/\gamma)P(+1, n)$ = probabilitas menemukan spin up-up jika kisi di tengah memiliki spin up;

dan

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\gamma} \frac{n}{\gamma} P(+1, n) = \text{probabilitas menemukan spin up-up dalam kisi} \\
&= \frac{N_{++}}{\gamma N / 2} = \frac{1+\sigma}{2}
\end{aligned} \tag{8.41}$$

Yang kita lakukan dengan aproksimasi Bethe-Pierls sebagai berikut:

- a. $\sum_{n=0}^{\gamma} P(+1, n)$ = kemungkinan mendapatkan spin up di tengah;

- b. $\sum_{n=0}^{\gamma} \frac{n}{\gamma} P(+1, n) =$ kemungkinan mendapatkan spin up di tetangga jika di tengah berada pada keadaan spin up;
- c. $\sum_{n=0}^{\gamma} \frac{n}{\gamma} P(-1, n) =$ kemungkinan mendapatkan spin up di tetangga jika di tengah berada pada keadaan spin down;
- d. $\sum_{n=0}^{\gamma} \left[\frac{n}{\gamma} P(+1, n) + \frac{n}{\gamma} P(-1, n) \right] =$ kemungkinan mendapatkan spin up di tetangga jika di tengah berada pada keadaan spin apa saja.

Karena titik kisi yang berada di tengah dapat dipilih titik kisi mana saja maka haruslah

Kebolehjadian menemukan spin up di tengah sama dengan kemungkinan menemukan spin up di tetangga,

atau

$$\sum_{n=0}^{\gamma} P(+1, n) = \sum_{n=0}^{\gamma} \left[\frac{n}{\gamma} P(+1, n) + \frac{n}{\gamma} P(-1, n) \right]$$

$$\left(e^{\beta\varepsilon} + ze^{-\beta\varepsilon} \right)^{\gamma} = \frac{1}{\gamma} \sum_{n=0}^{\gamma} [nP(+1, n) + nP(-1, n)] \quad (8.42)$$

Dapat ditunjukkan dengan mudah hubungan berikut ini

$$nP(+1, n) = z \frac{\partial}{\partial z} P(+1, n) \quad (8.43)$$

$$nP(-1, n) = z \frac{\partial}{\partial z} P(-1, n) \quad (8.44)$$

Jadi

$$\left(e^{\beta\varepsilon} + ze^{-\beta\varepsilon} \right)^{\gamma} = \frac{1}{\gamma} z \frac{\partial}{\partial z} \sum_{n=0}^{\gamma} [P(+1, n) + P(-1, n)]$$

$$\left(e^{\beta\varepsilon} + ze^{-\beta\varepsilon} \right)^{\gamma} = \frac{1}{\gamma} z \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left(e^{\beta\varepsilon} + ze^{-\beta\varepsilon} \right)^{\gamma} + \left(e^{-\beta\varepsilon} + ze^{\beta\varepsilon} \right)^{\gamma} \right\}$$

$$(e^{\beta\varepsilon} + ze^{-\beta\varepsilon})^\gamma = \frac{z}{\gamma} \left\{ \gamma (e^{\beta\varepsilon} + ze^{-\beta\varepsilon})^{\gamma-1} e^{-\beta\varepsilon} + \gamma (e^{-\beta\varepsilon} + ze^{\beta\varepsilon})^{\gamma-1} e^{\beta\varepsilon} \right\}$$

$$(e^{\beta\varepsilon} + ze^{-\beta\varepsilon})^\gamma = z \left\{ (e^{\beta\varepsilon} + ze^{-\beta\varepsilon})^{\gamma-1} e^{-\beta\varepsilon} + (e^{-\beta\varepsilon} + ze^{\beta\varepsilon})^{\gamma-1} e^{\beta\varepsilon} \right\}$$

$$e^{\beta\varepsilon} + ze^{-\beta\varepsilon} = z \left\{ e^{-\beta\varepsilon} + \left(\frac{e^{-\beta\varepsilon} + ze^{\beta\varepsilon}}{e^{\beta\varepsilon} + ze^{-\beta\varepsilon}} \right)^{\gamma-1} e^{\beta\varepsilon} \right\}$$

$$e^{\beta\varepsilon} + ze^{-\beta\varepsilon} = ze^{-\beta\varepsilon} + z \left(\frac{e^{-\beta\varepsilon} + ze^{\beta\varepsilon}}{e^{\beta\varepsilon} + ze^{-\beta\varepsilon}} \right)^{\gamma-1} e^{\beta\varepsilon}$$

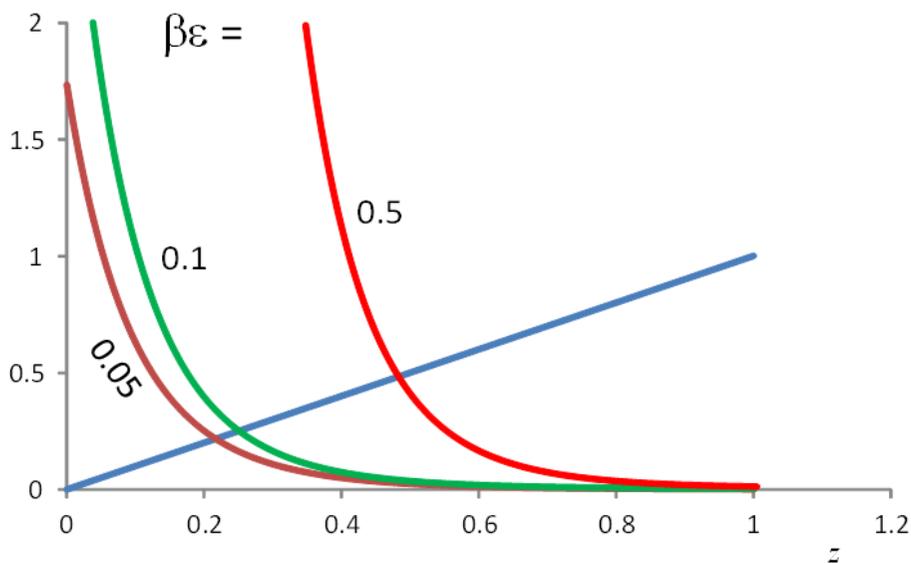
$$1 = z \left(\frac{e^{-\beta\varepsilon} + ze^{\beta\varepsilon}}{e^{\beta\varepsilon} + ze^{-\beta\varepsilon}} \right)^{\gamma-1}$$

atau

$$z = \left(\frac{e^{\beta\varepsilon} + ze^{-\beta\varepsilon}}{e^{-\beta\varepsilon} + ze^{\beta\varepsilon}} \right)^{\gamma-1}$$

$$= \left(\frac{1 + ze^{-2\beta\varepsilon}}{z + e^{-2\beta\varepsilon}} \right)^{\gamma-1} \tag{8.45}$$

Solusi untuk z pada persamaan (8.45) dapat dicari dengan metode grafik. Kita gambar $y_1 = z$ dengan kurva $y_2 = \{(1 + z \exp[-2\beta\varepsilon]) / (z + \exp[-2\beta\varepsilon])\}^{\gamma-1}$ sebagai fungsi z . Perpotongan dua kurva tersebut merupakan solusi z yang dicari. **Gambar 8.6** adalah kurva y_1 dan y_2 pada berbagai nilai $\beta\varepsilon$: 0,05; 0,1; dan 0,5. Makin besar nilai $\beta\varepsilon$ berarti suhu makin rendah atau interaksi antar spin makin besar. Tampak pada gambar bahwa makin besar $\beta\varepsilon$ maka nilai z makin besar.



Gambar 8.6 Fungsi $y_1 = z$ dan fungsi $y_2 = \{(1 + z \exp[-2\beta\epsilon]) / (z + \exp[-2\beta\epsilon])\}^{\gamma-1}$ sebagai fungsi z pada berbagai nilai $\beta\epsilon$: 0,05; 0,1 dan 0,5. Perpotongan kurva lengkung dengan garis lurus merupakan solusi untuk z pada persamaan (8.45). Tampak bahwa makin kecil $\beta\epsilon$ (suhu makin tinggi atau energi interaksi antar spin makin kecil) maka nilai z makin kecil.

Sekarang kita tinjau solusi pada beberapa kondisi khusus. Mudah ditunjukkan bahwa $z = 1$ merupakan solusi. Ini mudah dibuktikan dengan memasukkan $z = 1$ ke dalam persamaan (8.48) dan diperoleh.

$$1 = \left(\frac{1 + e^{-2\beta\epsilon}}{1 + e^{-2\beta\epsilon}} \right)^{\gamma-1}$$

Sifat lain yang dapat dibuktikan dengan mudah adalah jika sudah ditemukan z sebagai solusi maka $1/z$ juga merupakan solusi persamaan (8.48). Pembuktiannya adalah dengan mengganti z pada persamaan (8.48) dengan $1/z$ dan diperoleh

$$\frac{1}{z} = \left(\frac{1 + (1/z)e^{-2\beta\epsilon}}{(1/z) + e^{-2\beta\epsilon}} \right)^{\gamma-1} = \left(\frac{z + e^{-2\beta\epsilon}}{1 + ze^{-2\beta\epsilon}} \right)^{\gamma-1}$$

atau

$$z = \left(\frac{1 + ze^{-2\beta\epsilon}}{z + e^{-2\beta\epsilon}} \right)^{\gamma-1}$$

Hasil di atas menyimpulkan bahwa jika z adalah solusi maka $1/z$ juga merupakan solusi.

Perhatikan lagi fungsi $y_2(z) = \{(1 + z \exp[-2\beta\epsilon]) / (z + \exp[-2\beta\epsilon])\}^{\gamma-1}$.

Sudah kita tunjukkan bahwa pada $z = 1$, nilai $y_2(z)$ sama dengan nilai z karena $y_2(1) = 1$. Pada $z \rightarrow 0$ diperoleh $y_2 \rightarrow \exp[2(\gamma-1)\beta\epsilon]$. Ini berarti bahwa $y_2(z) > z$ ketika $z \rightarrow 0$. Dua kondisi tersebut berimplikasi bahwa fungsi $y_2(z)$ memotong fungsi $y_1 = z$ pada $z = 1$ dan pada z antara 0 sampai 1. Kondisi asimtot pada $z \rightarrow \infty$ diperoleh $y_2(z) \rightarrow \exp[-2(\gamma-1)\beta\epsilon]$. Karena $\beta\epsilon$ berharga negatif maka $y_2(\infty)/y_2(0) > 1$. Dan dengan sifat asimptotik ini maka $y_2(z) < z$ ketika $z \rightarrow \infty$.

Selanjutnya kita periksa apakah fungsi $y_2(z)$ monoton naik dengan cara menyelidiki gradien pada semua nilai z . Untuk mengecek apakah fungsi $y_2(z)$ monoton naik atau turun akan lebih mudah kita mengecek fungsi $\ln y_2(z)$. Sebab kalau $\ln y_2(z)$ monoton naik maka $y_2(z)$ juga monoton naik. Sebaliknya, kalau $\ln y_2(z)$ monoton turun maka $y_2(z)$ juga monoton turun. Dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa

$$\ln y_2(z) = (\gamma - 1) \ln \left[\frac{1 + ze^{-2\beta\epsilon}}{z + e^{-2\beta\epsilon}} \right]$$

Dengan demikian

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln y_2(z)}{\partial z} &= (\gamma - 1) \left[\frac{e^{-2\beta\epsilon}}{1 + ze^{-2\beta\epsilon}} - \frac{1}{z + e^{-2\beta\epsilon}} \right] \\ &= (\gamma - 1) \frac{e^{-4\beta\epsilon} - 1}{(1 + ze^{-2\beta\epsilon})(z + e^{-2\beta\epsilon})} \end{aligned}$$

Karena $\beta\epsilon < 0$ maka jelas bahwa $\partial \ln y_2 / \partial z > 0$ pada semua z . Dengan demikian fungsi $\ln y_2(z)$ monoton naik yang berimplikasi bahwa fungsi $y_2(z)$ monoton naik.

Dari semua penjelasan di atas dapat kita simpulkan bahwa, ketika $z \rightarrow 0$, $y_2(z) > z$, ketika $z = 1$, $y_2(z) = z$, dan ketika $z \rightarrow \infty$, $y_2(z) < z$. Sifat ini beserta sifat monoton naik fungsi $y_2(z)$ berimplikasi bahwa

- a) Jika pada $z = 1$ kemiringan kurva $y_2(z)$ kurang dari 1 maka fungsi $y_2(z)$ hanya berpotensi dengan fungsi $y_1 = z$ pada $z = 0$.

- b) Jika pada $z = 1$ kemiringan kurva $y_2(z)$ lebih dari 1 maka fungsi $y_2(z)$ berpotongan dengan fungsi $y_1 = z$ pada tiga nilai z , yaitu $z = 1$, $z = z_0$, dan $z = 1/z_0$.

Solusi dengan $z = 1$ adalah solusi dengan kondisi spin acak. Jumlah spin *up* dan *down* sama banyak dan bahan tidak berifat magnetik. Sifat magnetik muncul hanya jika ada solusi dengan $z \neq 1$ dan itu terpenuhi jika kemiringan kurva $y_2(z)$ pada $z = 1$ lebih dari satu. Dengan demikian kondisi di mana kemiringan kurva $y_2(z)$ pada $z = 1$ merupakan kondisi kritis saat terjadi transisi dari sifat magnetik ke sifat non magnetik.

Dapat dibuktikan dengan mudah bahwa kemiringan fungsi ini pada $z = 1$, adalah

$$m = \frac{(\gamma - 1)(e^{-4\beta\varepsilon} - 1)}{(1 + e^{-2\beta\varepsilon})^2} \quad (8.46)$$

Kita definisikan suhu kritis yaitu suhu ketika $m = 1$, yang memenuhi

$$1 = \frac{(\gamma - 1)(e^{-4\beta_c\varepsilon} - 1)}{(1 + e^{-2\beta_c\varepsilon})^2}$$

atau

$$(\gamma - 1)(e^{4\varepsilon/kT_c} - 1) = (1 + e^{2\varepsilon/kT_c})^2 \quad (8.47)$$

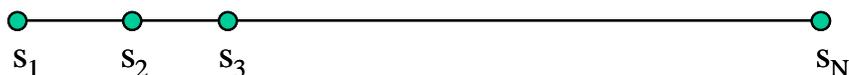
Solusi dari persamaan (8.47) adalah

$$kT_c = \frac{2\varepsilon}{\ln[\gamma/(\gamma - 1)]} \quad (8.48)$$

Tampak dari persamaan (8.48) bahwa suhu kritis sangat bergantung pada kekuatan interaksi antar spin bertetangga dan jumlah tetangga yang dimiliki setiap spin. Makin kuat interaksi dan makin banyak tetangga terdekat maka makin besar suhu kritis. Ini dapat dipahami dengan mudah bahwa makin kuat interaksi dan makin banyak tetangga terdekat maka arah spin akan makin sulit diacak oleh energi termal. Perlu suhu yang lebih tinggi untuk mengacak arah spin (mengubah dari kondisi magnetik menjadi non magnetik)

8.4 Model Ising Satu Dimensi

Sekarang kita bahas kasus yang sangat khusus yaitu model Ising satu dimensi di mana titik-titik kisi disusun dalam jarak yang sama sepanjang garis. Model ini menjadi menarik karena memiliki solusi analitik yang cukup mudah dicari.



Kita misalkan jumlah titik kisi adalah N dan keadaan tiap titik kisi dinyatakan dengan variable s_1, s_2, \dots, s_N . Tiap keadaan memiliki dua kemungkinan nilai, yaitu -1 dan $+1$. Untuk lebih mudah, kita gunakan syarat batas periodik, yaitu

$$s_k = s_{N+k} \quad (8.49)$$

Jika dikenakan medan magnetik B maka energi kisi adalah

$$E\{s_i\} = -\sum_k \varepsilon s_k s_{k+1} - \mu B \sum_k s_k \quad (8.50)$$

Pada penulisan bentuk energi di atas kita telah menganggap bahwa interaksi antar titik kisi hanya terjadi antara tetangga terdekat saja, yaitu hanya dengan satu titik kisi di sebelah kiri dan satu titik kisi di sebelah kanan. Dengan penggunaan syarat batas periodik maka kita memiliki hubungan

$$\sum_k s_k = \sum_k s_{k+1} \quad (8.52)$$

$$\sum_k s_k = \frac{1}{2} \sum_k (s_k + s_{k+1}) \quad (8.53)$$

sehingga kita dapat menulis

$$E\{s_i\} = -\varepsilon \sum_k s_k s_{k+1} - \frac{1}{2} \mu B \sum_k (s_k + s_{k+1}) \quad (8.84)$$

Fungsi partisi assembli adalah

$$\begin{aligned}
Z &= \sum_{s_1} \sum_{s_2} \dots \sum_{s_N} \exp[\beta E\{s_i\}] \\
&= \sum_{s_1} \sum_{s_2} \dots \sum_{s_N} \exp\left[-\beta \varepsilon \sum_k s_k s_{k+1} - (1/2) \beta \mu B \sum_k (s_k + s_{k+1})\right] \quad (8.85)
\end{aligned}$$

Kita akan menggunakan dua cara untuk mencari fungsi partisi pada persamaan (8.55). Cara pertama telah dilakukan oleh Ising tahun 1925 (E. Ising, *Z. Phys.* **31**, 253 (1925)) dan cara kedua dipaparkan oleh Tejero (C.F. Tejero, *American Journal of Physics* **56**, 169 (1988)).

Metode Ising

Untuk memudahkan penyelesaian persamaan di atas kita definisikan matriks 2×2 , \mathfrak{R} , yang memiliki elemen sebagai berikut

$$\langle s | \mathfrak{R} | s' \rangle = e^{-\beta \varepsilon s s' - (1/2) \beta \mu B (s + s')}$$

dengan s dan s' memiliki nilai -1 atau $+1$. Dengan definisi tersebut maka

$$\langle +1 | \mathfrak{R} | +1 \rangle = e^{-\beta \varepsilon - \beta \mu B} \quad (8.57)$$

$$\langle -1 | \mathfrak{R} | -1 \rangle = e^{-\beta \varepsilon + \beta \mu B} \quad (8.58)$$

$$\langle +1 | \mathfrak{R} | -1 \rangle = e^{\beta \varepsilon} \quad (8.59)$$

$$\langle -1 | \mathfrak{R} | +1 \rangle = e^{\beta \varepsilon} \quad (8.60)$$

Dengan demikian

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R} &= \begin{pmatrix} \langle +1 | \mathfrak{R} | +1 \rangle & \langle +1 | \mathfrak{R} | -1 \rangle \\ \langle -1 | \mathfrak{R} | +1 \rangle & \langle -1 | \mathfrak{R} | -1 \rangle \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{-\beta(\varepsilon + \mu B)} & e^{\beta \varepsilon} \\ e^{\beta \varepsilon} & e^{-\beta(\varepsilon - \mu B)} \end{pmatrix} \quad (8.61)
\end{aligned}$$

Akhirnya kita dapat menulis fungsi partisi sebagai

$$\begin{aligned}
 Z &= \sum_{s_1} \sum_{s_2} \dots \sum_{s_N} \exp[-\beta \varepsilon s_1 s_2 - (1/2)\beta \mu B(s_1 + s_2)] \\
 &\quad \times \exp[-\beta \varepsilon s_2 s_3 - (1/2)\beta \mu B(s_2 + s_3)] \\
 &\quad \times \exp[-\beta \varepsilon s_3 s_4 - (1/2)\beta \mu B(s_3 + s_4)] \\
 &\quad \dots \times \exp[-\beta \varepsilon s_N s_{N+1} - (1/2)\beta \mu B(s_N + s_{N+1})] \\
 &= \sum_{s_1} \sum_{s_2} \dots \sum_{s_N} \langle s_1 | \mathfrak{R} | s_2 \rangle \langle s_2 | \mathfrak{R} | s_3 \rangle \dots \langle s_N | \mathfrak{R} | s_{N+1} \rangle \\
 &= \sum_{s_1} \sum_{s_2} \dots \sum_{s_N} \langle s_1 | \mathfrak{R} | s_2 \rangle \langle s_2 | \mathfrak{R} | s_3 \rangle \dots \langle s_N | \mathfrak{R} | s_1 \rangle \tag{8.62}
 \end{aligned}$$

Mengingat

$$\sum_{s_k} |s_k\rangle \langle s_k| = 1 \tag{8.63}$$

maka

$$\begin{aligned}
 Z &= \sum_{s_1} \langle s_1 | \mathfrak{R}^N | s_1 \rangle \\
 &= Tr \mathfrak{R}^N \tag{8.64}
 \end{aligned}$$

Trace sebuah matriks tidak berubah jika dilakukan transformasi orthogonal pada matriks tersebut. Untuk menentukan $Tr \mathfrak{R}^N$ dengan mudah kita terlebih dahulu melakukan transformasi orthogonal pada \mathfrak{R}^N sehingga menjadi diagonal. Transformasi yang dilakukan adalah

$$A \mathfrak{R}^N A^+ = A \mathfrak{R} A^+ A \mathfrak{R} A^+ \dots A \mathfrak{R} A^+ = (A \mathfrak{R} A^+)^N \tag{8.65}$$

di mana $AA^+ = 1$. Agar $A \mathfrak{R}^N A^+$ diagonal maka syarat yang cukup adalah $A \mathfrak{R} A^+$ diagonal. Dalam bentuk diagonal tersebut maka elemen-elemen diagonal dari $A \mathfrak{R} A^+$ adalah energi eigen dari \mathfrak{R} , atau

$$A\mathfrak{R}A^+ = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} \quad (8.66)$$

dengan λ_+ dan λ_- adalah energi-energi eigen dari \mathfrak{R} . Dengan demikian kita akan mendapatkan

$$A\mathfrak{R}^N A^+ = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}^N \quad (8.67)$$

Jadi persoalan kita tinggal mencari energi eigen dari \mathfrak{R} . Untuk maksud ini, mari kita tulis

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \quad (8.68)$$

Nilai eigen dari \mathfrak{R} ditentukan dengan memecahkan persamaan berikut ini

$$\mathfrak{R} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

atau

$$\begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ b & d - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad (8.69)$$

Persamaan (8.69) memiliki solusi jika determinan matrix 2×2 nol, atau

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(a - \lambda)(d - \lambda) - b^2 = 0$$

atau

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - b^2) = 0 \quad (8.70)$$

Dengan membandingkan persamaan (8.61) dan (8.68) kita dapatkan hubungan

$$a = e^{-\beta(\varepsilon + \mu B)}$$

$$b = e^{\beta\epsilon}$$

$$d = e^{-\beta(\epsilon-\mu B)}$$

Sehingga

$$a + d = e^{-\beta(\epsilon+\mu B)} + e^{-\beta(\epsilon-\mu B)} = e^{-\beta\epsilon} \left[e^{-\beta\mu B} + e^{\beta\mu B} \right] = 2e^{-\beta\epsilon} \cosh \beta\mu B$$

$$ad - b^2 = e^{-\beta(\epsilon+\mu B)} e^{-\beta(\epsilon-\mu B)} - e^{2\beta\epsilon} = e^{-2\beta\epsilon} - e^{2\beta\epsilon} = -2\sinh 2\beta\epsilon$$

Dengan demikian, persamaan (8.70) menjadi

$$\lambda^2 - (2e^{-\beta\epsilon} \cosh \beta\mu B) \lambda - 2\sinh 2\beta\epsilon = 0 \quad (8.71)$$

Solusi untuk λ adalah

$$\begin{aligned} \lambda_{+,-} &= \frac{2e^{-\beta\epsilon} \cosh \beta\mu B \pm \sqrt{4e^{-2\beta\epsilon} \cosh^2 \beta\mu B + 8\sinh 2\beta\epsilon}}{2} \\ &= \frac{2e^{-\beta\epsilon} \cosh \beta\mu B \pm 2e^{-\beta\epsilon} \sqrt{\cosh^2 \beta\mu B + 2e^{2\beta\epsilon} \sinh 2\beta\epsilon}}{2} \\ &= e^{-\beta\epsilon} \left[\cosh \beta\mu B \pm \sqrt{\cosh^2 \beta\mu B + 2e^{2\beta\epsilon} \sinh 2\beta\epsilon} \right] \quad (8.72) \end{aligned}$$

Dengan demikian

$$\lambda_+ = e^{-\beta\epsilon} \left[\cosh \beta\mu B + \sqrt{\cosh^2 \beta\mu B + 2e^{2\beta\epsilon} \sinh 2\beta\epsilon} \right] \quad (8.73)$$

$$\lambda_- = e^{-\beta\epsilon} \left[\cosh \beta\mu B - \sqrt{\cosh^2 \beta\mu B + 2e^{2\beta\epsilon} \sinh 2\beta\epsilon} \right] \quad (8.74)$$

Tampak dari persamaan (6.73) bahwa $|\lambda_+| > |\lambda_-|$. Karena

$$A\mathfrak{R}^N A^+ = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}^N$$

maka

$$Tr \mathfrak{R}^N = Tr(A\mathfrak{R}^N A^+) = Tr \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}^N = \lambda_+^N + \lambda_-^N \quad (8.75)$$

sehingga

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \ln Z &= \frac{1}{N} \ln(\lambda_+^N + \lambda_-^N) \\ &= \frac{1}{N} \ln \left[\lambda_+^N \left\{ 1 + \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^N \right\} \right] \\ &= \frac{1}{N} \ln \lambda_+^N + \frac{1}{N} \ln \left\{ 1 + \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^N \right\} \\ &= \ln \lambda_+ + \frac{1}{N} \ln \left\{ 1 + \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^N \right\} \end{aligned} \quad (8.76)$$

Mengingat $|\lambda_+| > |\lambda_-|$ maka akan terpenuhi $\lambda_-/\lambda_+ \rightarrow 0$ jika $N \rightarrow \infty$. Dengan demikian persamaan (8.76) teraproksimasi menjadi

$$\frac{1}{N} \ln Z \approx \ln \lambda_+ \quad (8.77)$$

Hubungan antara fungsi partisi dengan energi bebas helmholtz adalah $F = (1/\beta) \ln Z$. Berdasarkan persamaan (8.77) maka energi helmholtz per spin adalah

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} F &= \frac{1}{\beta N} \ln Z = \frac{1}{\beta} \ln \lambda_+ \\ &= \frac{1}{\beta} \ln \left\{ e^{-\beta \varepsilon} \left[\cosh \beta \mu B + \sqrt{\cosh^2 \beta \mu B + 2e^{2\beta \varepsilon} \sinh 2\beta \varepsilon} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$= -\varepsilon + \frac{1}{\beta} \ln \left[\cosh \beta \mu B + \sqrt{\cosh^2 \beta \mu B + 2e^{2\beta\varepsilon} \sinh 2\beta\varepsilon} \right] \quad (8.78)$$

Dari energi helmholtz kita menghitung magnetisasi menggunakan persamaan $M = (1/V)\partial F/\partial B$ kita dapatkan magnetisasi assembly sebagai

$$M = \frac{1}{V} \frac{\partial F}{\partial B}$$

$$= N\mu \sinh \beta \mu B \left(\frac{1 + \cosh \beta \mu B (\cosh^2 \beta \mu B + 2e^{2\beta\varepsilon} \sinh 2\beta\varepsilon)^{-1/2}}{\cosh \beta \mu B + \sqrt{\cosh^2 \beta \mu B + 2e^{2\beta\varepsilon} \sinh 2\beta\varepsilon}} \right) \quad (8.80)$$

Tampak dari persamaan (8.78) bahwa jika $B = 0$ maka $M = 0$. Jadi, pada suhu berapa pun magnetisasi selalu nol. Ini berarti tidak ada magnetisasi spontan pada model Ising satu dimensi. Atau, dalam model ising satu dimensi tidak muncul fenomena feromagnetik.

Kita dapat melihat bentuk khusus persamaan (8.78) pada suhu sangat kecil dan sangat besar. Karena $\beta = -1/kT$ maka ketika $T \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow -\infty$ sehingga $\exp[2\beta\varepsilon] \rightarrow 0$ dan $\exp[2\beta\varepsilon] \sinh[2\beta\varepsilon] \rightarrow -1/2$. Magnetisasi per satuan spin dapat diaproksimasi sebagai

$$M \approx \frac{N\mu}{V} \quad (8.81)$$

Persamaan (8.81) menyatakan semua spin mengarah ke satu arah, yaitu searah dengan medan magnet.

Sebaliknya, jika $T \rightarrow \infty$ maka $\beta\varepsilon \rightarrow 0$. Akibatnya $\cosh [\beta\mu B] \rightarrow 1$, $\exp[2\beta\varepsilon] \rightarrow 1$, dan $\sinh[2\beta\varepsilon] \rightarrow 0$. Dengan sigat ini maka bagian dalam tanda kurung dalam persamaan (8.80) mendekati satu dan momen magnetik menjadi

$$M \approx N\mu \sinh \beta \mu B \rightarrow 0 \quad (8.82)$$

Persamaan (8.82) bermakna bahwa semua spin memiliki arah acak sehingga tidak ada arah resultan.

Korelasi Spin

Selanjutnya kita bahas tentang korelasi antar spin dalam model ini. Kita tulis ulang fungsi partisi sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 Z &= \sum_{s_1} \sum_{s_2} \dots \sum_{s_N} \exp \left[-\beta \varepsilon \sum_k s_k s_{k+1} - \beta \mu B \sum_k s_k \right] \\
 &= \sum_{s_1} \sum_{s_2} \dots \sum_{s_N} \exp \left[\sum_k (bs_k + Ks_k s_{k+1}) \right] \tag{8.83}
 \end{aligned}$$

Korelasi antara spin tetangga terdekat adalah nilai rata-rata perkalian dua spin tetangga terdekat, yaitu

$$\langle s_j s_{j+1} \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{s_1} \sum_{s_2} \dots \sum_{s_N} (s_j s_{j+1}) \exp \left[\sum_k (bs_k + Ks_k s_{k+1}) \right] \tag{8.82}$$

Karena sifat simetri maka $\langle s_1 s_2 \rangle = \langle s_2 s_3 \rangle = \langle s_3 s_4 \rangle = \dots = \langle s_{N-1} s_N \rangle = \langle s_N s_1 \rangle$. Oleh karena itu kita dapat menulis

$$\begin{aligned}
 \langle s_j s_{j+1} \rangle &= \frac{1}{Z} \sum_{s_1} \sum_{s_2} \dots \sum_{s_N} \left(\frac{s_1 s_2 + s_2 s_3 \dots + s_N s_1}{N} \right) \exp \left[\sum_k (bs_k + Ks_k s_{k+1}) \right] \\
 &= \frac{1}{ZN} \sum_{s_1} \sum_{s_2} \dots \sum_{s_N} (s_1 s_2 + s_2 s_3 \dots + s_N s_1) \exp \left[\sum_k (bs_k + Ks_k s_{k+1}) \right] \\
 &= \frac{1}{ZN} \sum_{s_1} \sum_{s_2} \dots \sum_{s_N} \frac{\partial}{\partial K} \exp \left[\sum_k (bs_k + Ks_k s_{k+1}) \right] \\
 &= \frac{1}{ZN} \frac{\partial}{\partial K} \sum_{s_1} \sum_{s_2} \dots \sum_{s_N} \exp \left[\sum_k (bs_k + Ks_k s_{k+1}) \right] = \frac{1}{ZN} \frac{\partial Z}{\partial K} \\
 &= \frac{\partial}{\partial K} \frac{1}{N} \ln Z \tag{8.83}
 \end{aligned}$$

Karena pada limit $N \rightarrow \infty$ kita memiliki persamaan aproksimasi (8.77) maka kita dapatkan

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle s_j s_{j+1} \rangle = \frac{\partial}{\partial K} \ln \lambda_+ = \frac{1}{\lambda_+} \frac{\partial \lambda_+}{\partial K} \quad (8.84)$$

Persamaan (8.73) dapat ditulis ulang dalam bentuk

$$\lambda_+ = e^K \left[\cosh \beta \mu B + \sqrt{\cosh^2 \beta \mu B + 2e^{2K} \sinh(-2K)} \right] \quad (8.85)$$

Dengan menggunakan persamaan (8.73) dapat kita tulis

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_+}{\partial K} &= e^K \left[\cosh \beta \mu B + \sqrt{\cosh^2 \beta \mu B + 2e^{2K} \sinh(-2K)} \right] \\ &\quad - \frac{2e^{3K} [\sinh(2K) + \cosh(2K)]}{\sqrt{\cosh^2 \beta \mu B + 2e^{2K} \sinh(-2K)}} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle s_j s_{j+1} \rangle &= \frac{e^K \left[\cosh \beta \mu B + \sqrt{\cosh^2 \beta \mu B + 2e^{2K} \sinh(-2K)} \right]}{e^K \left[\cosh \beta \mu B + \sqrt{\cosh^2 \beta \mu B + 2e^{2K} \sinh(-2K)} \right]} \\ &\quad - \frac{2e^{3K} [\sinh(2K) + \cosh(2K)]}{\sqrt{\cosh^2 \beta \mu B + 2e^{2K} \sinh(-2K)}} \\ &\quad - \frac{e^K \left[\cosh \beta \mu B + \sqrt{\cosh^2 \beta \mu B + 2e^{2K} \sinh(-2K)} \right]}{e^K \left[\cosh \beta \mu B + \sqrt{\cosh^2 \beta \mu B + 2e^{2K} \sinh(-2K)} \right]} \\ &= 1 - \frac{2e^{2K} [\sinh(2K) + \cosh(2K)]}{\left[\cosh \beta \mu B + \sqrt{\cosh^2 \beta \mu B - 2e^{2K} \sinh(2K)} \right] \sqrt{\cosh^2 \beta \mu B - 2e^{2K} \sinh(2K)}} \quad (8.86) \end{aligned}$$

Metode Tejero

Pendekatan lain menyelesaikan model Ising adalah dengan metode yang dibahas Tejero. Kita bahas metode tersebut sebagai berikut. Kita tulis ulang fungsi partisi sebagai berikut

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{s_1} \sum_{s_2} \dots \sum_{s_N} \exp \left[-\beta \varepsilon \sum_k s_k s_{k+1} - \beta \mu B \sum_k s_k \right] \\ &= \sum_{s_1} \sum_{s_2} \dots \sum_{s_N} \exp \left[\sum_k (b s_k + K s_k s_{k+1}) \right] \quad (8.87) \end{aligned}$$

dengan $b = -\beta\mu B$ dan $K = -\beta\varepsilon$. Kita asumsikan bahwa jumlah partikel (N) adalah genap. Persamaan (8.55) kita uraikan sebagai berikut.

$$Z = \sum_{s_1} \sum_{s_2} \dots \sum_{s_N} e^{b(s_1+s_3+s_5+\dots+s_{N-1})} \left\{ e^{bs_2+K(s_1s_2+s_2s_3)} \right\} \\ \times \left\{ e^{bs_4+K(s_3s_4+s_4s_5)} \right\} \times \dots \times \left\{ e^{bs_N+K(s_{N-1}s_N+s_Ns_1)} \right\} \quad (8.88)$$

Dengan memperhatikan persamaan (8.76) tampak jelas bahwa s_2 hanya muncul pada kurung kurawal pertama. Dengan demikian penjumlahan pada s_2 dapat dilakukan langsung pada bagian kurung tersebut. Begitu pula $s_4, s_6, s_8,$ dan seterusnya hanya muncul pada kurung kurawal. Oleh karena itu kita dapat menulis ulang persamaan (8.76) menjadi

$$Z = \sum_{s_1} \sum_{s_3} \dots \sum_{s_{N-1}} e^{b(s_1+s_3+s_5+\dots+s_{N-1})} \sum_{s_2} \left\{ e^{bs_2+K(s_1s_2+s_2s_3)} \right\} \\ \times \sum_{s_4} \left\{ e^{bs_4+K(s_3s_4+s_4s_5)} \right\} \times \dots \times \sum_{s_N} \left\{ e^{bs_N+K(s_{N-1}s_N+s_Ns_1)} \right\} \quad (8.89)$$

Mengingat variabel spin hanya memiliki nilai -1 atau $+1$ maka

$$\sum_{s_2} \left\{ e^{bs_2+K(s_1s_2+s_2s_3)} \right\} = e^{-b+K(-s_1-s_3)} + e^{b+K(s_1+s_3)} = e^{-b-K(s_1+s_3)} + e^{b+K(s_1+s_3)} \\ \sum_{s_4} \left\{ e^{bs_4+K(s_3s_4+s_4s_5)} \right\} = e^{-b+K(-s_3-s_5)} + e^{b+K(s_3+s_5)} \\ \vdots \\ \sum_{s_N} \left\{ e^{bs_N+K(s_{N-1}s_N+s_Ns_1)} \right\} = e^{-b+K(-s_{N-1}-s_1)} + e^{b+K(s_{N-1}+s_1)}$$

Dengan demikian persamaan (8.76) menjadi

$$Z = \sum_{s_1} \sum_{s_3} \dots \sum_{s_{N-1}} e^{b(s_1+s_3+s_5+\dots+s_{N-1})} \left\{ e^{-b-K(s_1+s_3)} + e^{b+K(s_1+s_3)} \right\} \\ \times \left\{ e^{-b-K(s_3+s_5)} + e^{b+K(s_3+s_5)} \right\} \times \dots \times \left\{ e^{-b-K(s_{N-1}+s_1)} + e^{b+K(s_{N-1}+s_1)} \right\} \quad (8.77)$$

Lebih lanjut kita lakukan transformasi berikut ini

$$e^{-b-K(s_i+s_j)} + e^{b+K(s_i+s_j)} = f_1 e^{b_1(s_i+s_j)/2+K_1s_i s_j} \quad (8.78)$$

Selanjutnya kita perlu mencari parameter f_1 , b_1 , dan K_1 . Kita lakukan sebagai berikut. Masukkan $s_1 = -1$ dan $s_2 = -1$ ke dalam persamaan (8.78) maka

$$e^{-b+2K} + e^{b-2K} = f_1 e^{-b_1+K_1}$$

atau

$$2 \left(\frac{e^{-(b-2K)} + e^{b-2K}}{2} \right) = f_1 e^{-b_1+K_1}$$

atau

$$2 \cosh(b-2K) = f_1 e^{-b_1+K_1} \quad (8.79)$$

Masukkan $s_1 = +1$ dan $s_2 = +1$ ke dalam persamaan (8.78) maka

$$e^{-b-2K} + e^{b+2K} = f_1 e^{b_1+K_1}$$

atau

$$2 \left(\frac{e^{-(b+2K)} + e^{b+2K}}{2} \right) = f_1 e^{b_1+K_1}$$

atau

$$2 \cosh(b+2K) = f_1 e^{b_1+K_1} \quad (8.80)$$

Masukkan $s_1 = +1$ dan $s_2 = -1$ atau $s_1 = -1$ dan $s_2 = +1$ ke dalam persamaan (8.78) maka

$$e^{-b} + e^b = f_1 e^{-K_1}$$

atau

$$2 \left(\frac{e^{-b} + e^b}{2} \right) = f_1 e^{-K_1}$$

atau

$$2 \cosh b = f_1 e^{-K_1} \quad (8.81)$$

Bagi persamaan (8.80) dengan persamaan (8.79) sehingga diperoleh

$$\frac{\cosh(b+2K)}{\cosh(b-2K)} = e^{2b_1}$$

atau

$$b_1 = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\cosh(b+2K)}{\cosh(b-2K)} \right] \quad (8.82)$$

Selanjutnya dari persamaan (8.81) kita dapatkan

$$f_1 = 2e^{K_1} \cosh b \quad (8.83)$$

Kalikan persamaan (8.79) dan persamaan (8.80) dan diperoleh persamaan berikut ini

$$4 \cosh(b-2K) \cosh(b+2K) = f_1^2 e^{2K_1} \quad (8.84)$$

Substitusi f_1 dari persamaan (8.83) ke dalam persamaan (8.84) maka diperoleh

$$4 \cosh(b-2K) \cosh(b+2K) = 4e^{4K_1} \cosh^2 b$$

atau

$$e^{4K_1} = \frac{4 \cosh(b-2K) \cosh(b+2K)}{\cosh^2 b}$$

atau

$$K_1 = \frac{1}{4} \ln \left[\frac{4 \cosh(b-2K) \cosh(b+2K)}{\cosh^2 b} \right] \quad (8.85)$$

Dari persamaan (8.85) atau persamaan sebelumnya kita dapat menulis

$$e^{K_1} = \left[\frac{4 \cosh(b-2K) \cosh(b+2K)}{\cosh^2 b} \right]^{1/4}$$

Substitusi ke dalam persamaan (8.83) diperoleh

$$f_1 = 2 \left[\frac{4 \cosh(b-2K) \cosh(b+2K)}{\cosh^2 b} \right]^{1/4} \cosh b \quad (8.86)$$

Persamaan (8.87) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}
Z &= \sum_{s_1} \sum_{s_3} \dots \sum_{s_{N-1}} e^{b(s_1+s_3+s_5+\dots+s_{N-1})} \left\{ f_1 e^{b_1(s_1+s_3)/2+K_1s_1s_3} \right\} \\
&\times \left\{ f_1 e^{b_1(s_3+s_5)/2+K_1s_3s_5} \right\} \times \dots \times \left\{ f_1 e^{b_1(s_{N-1}+s_1)/2+K_1s_{N-1}s_1} \right\} \\
&= f_1^{N/2} \sum_{s_1} \sum_{s_3} \dots \sum_{s_{N-1}} e^{(b+b_1)(s_1+s_3+s_5+\dots+s_{N-1})+K_1(s_1s_3+s_3s_5+\dots+s_{N-1}s_1)} \\
&= f_1^{N/2} Z_{N/2}(b+b_1, K_1) \tag{8.87}
\end{aligned}$$

di mana $Z_{N/2}(b+b_1, K_1)$ adalah fungsi partisi $N/2$ buah partikel dengan medan luar menjadi $b+b_1$ dan energi interaksi antar spin menjadi K_1 . Persamaan (8.87) dapat diiterasi terus hingga dinyatakan dalam Z_1 .

Latihan

Perekat konduktif adalah komposit yang dibuat dengan mendispersi partikel yang bersifat konduktif seperti partikel logam ke dalam resin yang bersifat. Jika fraksi volum partikel sangat kecil maka konduktivitas listrik komposit sama dengan konduktivitas listrik resin (bersifat isolator). Jika fraksi volum partikel dinaikkan terus-menerus maka pada suatu saat, terjadi loncatan konduktivitas secara tiba-tiba dan menyamai konduktivitas partikel. Peristiwa ini disebut perkolasi. Perkolasi terjadi karena terbentuknya persambungan kontinu kontak antar partikel yang memungkinkan terbentuknya jalur bagi arus listrik. Fraksi volum saat terjadi perkolasi disebut ambang perkolasi. Pada saat fraksi volum partikel berada di bawah ambang perkolasi maka masih ada kontak yang terputus antar partikel sehingga komposit belum bisa dialiri listrik. Saat fraksi volum sama dengan ambang perkolasi maka kontak kontinu antar partikel mulai terbentuk sehingga arus tiba-tiba mengalir (konduktivitas tiba-tiba tinggi). Ketika fraksi volum dinaikkan melebihi ambang perkolasi maka konduktivitas tidak lagi berubah (tetap tinggi). Terjadinya perkolasi pada komposit perekat konduktif dapat dibahas dengan model Ising. Strateginya sebagai berikut. Kita bagi komposit atas sejumlah sel-sel kecil. Ukuran satu sel sedemikian sehingga ketika partikel diisikan ke dalam sel maka permukaan partikel tepat menyentuh dinding sel. Jika sel yang dibuat berbentuk kubus maka panjang sisi sel sama dengan diameter partikel. Sel-sel yang dibuat dapat berada dalam dua kondisi: terisi oleh partikel atau terisi penuh oleh bahan perekat. Inilah yang menjadi landasan mengapa model Ising dapat digunakan, yaitu adanya dua keadaan. Dalam komposit dapat terjadi kontak dua sel yang mengandung partikel, dua sel yang mengandung perekat saja dan sel yang mengandung partikel dan yang

mengandung perekat. Jika jumlah sel yang dibuat adalah N dan jumlah partikel adalah N_p maka jumlah sel yang tidak diisi partikel adalah $N - N_p$. Dikaitkan dengan model Ising untuk spin maka n ekuivalen dengan N_+ dan $N - N_p$ ekuivalen dengan $N_- = N - N_+$. Jika energi interaksi ketika terjadi kontak antara dua sel yang berisi partikel adalah ϵ_{pp} , energi interaksi antara dua sel yang hanya berisi resin adalah ϵ_{rr} , dan energi interaksi antara sel yang berisi partikel dan yang berisi resin adalah ϵ_{pr} , maka energi konfigurasi memenuhi

$$E\{N_{pp}, N_{rr}, N_{pr}\} = N_{pp}\epsilon_{pp} + N_{rr}\epsilon_{rr} + N_{pr}\epsilon_{pr}$$

dengan N_{pp} , N_{rr} , dan N_{pr} masing-masing adalah jumlah kontak dua sel yang mengandung partikel, jumlah kontak dua sel yang berisi resin saja, dan jumlah kontak sel yang mengandung partikel dan yang mengandung resin. Jika jumlah tetangga terdekat tiap sel adalah γ , buktikan bahwa energi konfigurasi di atas dapat ditulis sebagai

$$E\{N, N_{pp}, N_p, \gamma\} = N_{pp}E_1 + \gamma N_p E_2 + \gamma N E_3$$

dengan

$$E_1 = \epsilon_{pp} + \epsilon_{rr} - 2\epsilon_{pr}$$

$$E_2 = \epsilon_{pr} - \epsilon_{rr}$$

$$E_3 = \epsilon_{rr} / 2$$

Dengan mendefinisikan parameter L yang memenuhi $N_p/N = (1+L)/2$ dan menggunakan pendekatan Bragg-Williams, buktikan bahwa energi konfigurasi per satuan partikel memenuhi

$$\frac{E}{N} = \gamma \left[\frac{E_1 L^2}{8} + \left(\frac{E_1}{4} + \frac{E_2}{2} \right) L + \left(\frac{E_1}{8} + \frac{E_2}{2} + E_3 \right) \right]$$

Tentukan fraksi jumlah partikel saat terjadi perkolasi.

(lihat Mora, Sahrul Saehana, Euis Sustini, Khairurrijal, and Mikrajuddin Abdullah, *American Journal of Applied Sciences* **9**,1113-1123 (2012))

Daftar Pustaka

1. Mikrajuddin Abdullah, *Pengantar Fisika Statistik*, Bandung: CV Rezeki Putera (2009).
2. Mikrajuddin Abdullah, *Diktat Kuliah Mekanika Statistik*, Bandung: Penerbit ITB (2007).
3. Kerson Huang, *Statistical Mechanics*, New York: John Wiley (1987).
4. Joseph Edward Meyer and Maria Geopaert Meyer, *Statistical Mechanics*, New York: John Wiley (1977).
5. Anthony John Pointon, *An Introduction To Statistical Physics For Students*, New York: Longmann (1967).
6. Richard P. Feynman, *Statistical Mechanics*, Massachusetts: Benjamin (1972).

MEKANIKA STATISTIK

Pengalaman selama sekitar 10 tahun memberikan kuliah Mekanika Statistik untuk Mahasiswa Magister dan Doktor di Institut Teknologi Bandung bahwa mata ini yang merupakan mata kuliah wajib termasuk yang cukup sulit dipahami para mahasiswa. Hal ini tidak dapat dipungkiri karena memang materi yang terkandung di dalamnya lebih banyak yang bersifat abstrak. Diperlukan abstraksi yang tinggi untuk dapat memahami bab-bab yang ada dalam kuliah tersebut.

Kesulitan makin bertambah akibat cara pembahasan di sejumlah buku yang ada terlalu global sehingga ada beberapa bagian yang memerlukan pemikiran ekstra untuk dapat memahaminya. Buku acuan utama kuliah ini di antaranya Statistical Mechanics tulisan K. Huang atau buku klasik Statistical Mechanics tulisan J.E. Mayer dan M.G. Mayer. Namun, materi yang dipaparkan dalam buku tersebut perlu dicermati dan direnungi secara mendalam agar dapat memahaminya. Tidak saja mahasiswa, tetapi dosen juga perlu kerja keras untuk memahami materi-materi tersebut.

Atas pengalaman mengajar sekitar 10 tahun saya mencoba menyusun draft sedikit-demi sedikit dan dicobakan ke mahasiswa tiap semester. Penambahan, koreksi, dan penyesuaian dengan cara tangkap mahasiswa menghasilkan naskah seperti ini.

ISBN 978-602-74668-1-4

Penerbit
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Bandung
Labtek VIII Lt. 1, Gedung Achmad Bakrie
Jl. Ganesa 10 Bandung
Telp.: 022 2515032, Fax.: 022 2502360
<http://www.fmipa.itb.ac.id>

FMIPA

