

Analisis **Fourier** dan **Wavelet**

Hendra Gunawan
KK Analisis & Geometri

Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Bandung
Bandung, 2017

Cetakan 1, 2017

Hak Cipta dilindungi undang-undang

All Rights Reserved

@Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam ITB

Dilarang mengutip atau memperbanyak sebagian atau seluruh isi buku ini tanpa izin tertulis dari Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam ITB

Hak cipta pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam ITB, 2017

Data katalog dalam terbitan

GUNAWAN, HENDRA

Analisis Fourier dan Wavelet

Oleh Hendra Gunawan. - Bandung.

Penerbit Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam ITB, 2017

Labtek VIII Lantai 1

Jl. Ganesa 10 Bandung

Telp.: 022 2515032, Fax.: 022 2502360

<http://www.fmipa.itb.ac.id>

Daftar Isi

Kata Pengantar	5
0 Pendahuluan	7
0.1 Notasi dan istilah, bilangan kompleks	7
0.2 Ruang Hilbert	10
0.3 Ukuran Lebesgue di \mathbf{R}	12
0.4 Soal Latihan	13
1 Mengapa Deret Fourier	15
1.1 Persamaan panas untuk kawat lurus	15
1.2 Persamaan panas untuk kawat melingkar	17
1.3 Soal latihan	18
2 Deret Fourier	21
2.1 Deret Fourier dari fungsi periodik	21
2.2 Contoh Deret Fourier dan Ketaksamaan Bessel	23
2.3 Soal latihan	26
3 Kekonvergenan Deret Fourier	29
3.1 Jumlah parsial dan intuisi melalui kernel Dirichlet	29
3.2 Kekonvergenan titik demi titik dan seragam	31
3.3 Soal latihan	34
4 Deret Fourier pada Interval Sembarang dan Aplikasinya	35
4.1 Deret Fourier pada interval sembarang	35
4.2 Contoh aplikasi	38
4.3 Soal latihan	40
5 Beberapa Catatan Mengenai Deret Fourier	41
5.1 Turunan dan integral deret Fourier	41

2	Hendra Gunawan	
5.2	Deret Fourier sebagai transformasi	42
5.3	Perbandingan dengan deret Taylor	42
5.4	Fenomena Gibbs	43
5.5	Teorema Fejér	44
5.6	Soal latihan	44
6	Himpunan Fungsi Ortogonal	45
6.1	Himpunan fungsi ortogonal	45
6.2	Ruang $PC(a, b)$ sebagai ruang hasilkali dalam	46
6.3	Kekonvergenan di ruang $PC(a, b)$	48
6.4	Soal latihan	49
7	Ruang $L^2(a, b)$	51
7.1	Topologi di $L^2(a, b)$	51
7.2	Ketaksamaan Bessel	53
7.3	Basis ortonormal di $L^2(a, b)$	54
7.4	Soal latihan	55
8	Deret Fourier yang Diperumum dan Hampiran Terbaik di $L^2(a, b)$	57
8.1	Deret Fourier yang diperumum	57
8.2	Hampiran terbaik di $L^2(a, b)$	58
8.3	Masalah Sturm-Liouville reguler	59
8.4	Soal latihan	62
9	Polinom Legendre, Basis Haar, dan Basis Walsh	63
9.1	Himpunan polinom ortogonal	63
9.2	Polinom Legendre	64
9.3	Basis Haar dan Basis Walsh	65
9.4	Soal latihan	68
10	Transformasi Fourier	69
10.1	Motivasi	69
10.2	Ruang $L^1(\mathbf{R})$ dan $L^2(\mathbf{R})$	70
10.3	Transformasi Fourier	72

	Analisis Fourier dan Wavelet	3
10.4 Soal latihan		74
11 Konvolusi		75
11.1 Konvolusi dan sifat-sifat dasarnya		75
11.2 Identitas hampiran		77
11.3 Fungsi Gauss dan Teorema Aproksimasi Weierstrass		79
11.4 Soal latihan		81
12 Teorema Inversi Fourier		83
12.1 Teorema Inversi Fourier		83
12.2 Transformasi Fourier di L^2		85
12.3 Soal latihan		87
13 Aplikasi Transformasi Fourier		89
13.1 Aplikasi pada persamaan panas		89
13.2 Persamaan Laplace pada setengah bidang		91
13.3 Teorema Sampling Shannon		92
13.4 Ketaksamaan Heisenberg		93
13.5 Soal latihan		95
14 Transformasi Fourier dan Masalah Sturm-Liouville		97
14.1 Masalah Sturm-Liouville Singular		97
14.2 Transformasi cosinus Fourier dan transformasi sinus Fourier		99
14.3 Aplikasi pada persamaan panas		100
14.4 Soal latihan		101
15 Wavelet		103
15.1 Menengok kembali basis Haar		103
15.2 Wavelet ortonormal		104
15.3 Basis yang dibangun oleh sebuah fungsi		107
15.4 Soal latihan		108
16 Analisis Multi-Resolusi		109
16.1 Analisis Multi-Resolusi		109
16.2 Konstruksi wavelet		111
16.3 Wavelet bertumpuan kompak dan kemulusannya		112

4	Hendra Gunawan	
16.4	Teorema sampling	114
16.5	Soal latihan	115
17	Transformasi Wavelet Kontinu dan 'Rangka'	117
17.1	Transformasi wavelet kontinu dan kesamaan resolusi	117
17.2	Diskritisasi dan rangka	120
17.3	Syarat perlu dan syarat cukup untuk membentuk rangka	123
17.4	Soal latihan	124
18	Lebih jauh tentang Rangka	127
18.1	Operator rangka	127
18.2	Rangka dual	128
18.3	Skema rekonstruksi	129
18.4	Soal latihan	132
19	Penutup	133
19.1	Pemrosesan signal 1D	133
19.2	Pemrosesan citra 2D	135
	Daftar Pustaka	137

Kata Pengantar

Buku ini merupakan pengembangan dari catatan kuliah Analisis Fourier dan Wavelet yang pernah penulis ajarkan kepada mahasiswa S2 Matematika ITB pada tahun 1997/1998. Sebagian materi, terutama bagian awal, pernah pula diberikan dalam kuliah Pengantar Analisis Fourier untuk mahasiswa S1 Matematika ITB pada tahun 1999 dan 2000. Beberapa bagian lainnya merupakan tambahan, yang penulis anggap berguna bagi pembaca yang belum pernah mengambil kedua matakuliah yang disebutkan di atas. Untuk mengukur pemahaman pembaca terhadap materi yang dibahas, tiap bab diakhiri dengan sejumlah soal latihan.

Penyusunan catatan kuliah dimulai di Bandung dan dilanjutkan serta diperbaiki di Sydney ketika penulis berkunjung ke School of Mathematics, University of New South Wales di Sydney pada tahun 2000/2001 sebagai Merdeka Fellow 2000. Catatan kuliah edisi pertama diluncurkan pada tahun 2001, dan setelah mengalami perbaikan, catatan kuliah edisi kedua diterbitkan pada tahun 2006. Pada awal tahun 2014, ketika penulis memberi kuliah Analisis Fourier lagi, revisi besar-besaran dilakukan dan sebagai hasilnya catatan kuliah edisi ketiga diterbitkan pada bulan Mei 2014. Naskah buku ini merupakan hasil penyempurnaan berkelanjutan dari catatan kuliah edisi ketiga, yang penulis lakukan dari tahun 2015 hingga tahun 2017. Penulis berterima kasih kepada Eka Rahmi Kahar yang membuat Gambar 2.2a, 2.2b, 3.1, 5.4, 9.3a, 9.3b, dan 9.3c.

Menyadari bahwa buku ini masih jauh dari sempurna, penulis dengan senang hati akan menerima segala masukan atau usulan perbaikan dari para pembaca sekalian. Masukan atau usulan perbaikan, bila ada, dapat disampaikan langsung atau via e-mail ke hgunawan@math.itb.ac.id.

H.G.

Bandung, Agustus 2017

0. Pendahuluan

Analisis Fourier mempelajari berbagai teknik untuk menganalisis sebuah fungsi dengan menguraikannya sebagai deret atau integral fungsi tertentu (yang sifat-sifatnya telah kita kenal dengan baik, seperti fungsi polinom atau fungsi trigonometri). Analisis Fourier merupakan alat yang ampuh untuk memecahkan berbagai masalah, khususnya masalah yang berbentuk persamaan diferensial parsial yang muncul dalam sains dan ilmu rekayasa, dan tentunya untuk menganalisis signal seperti signal suara dan citra.

Materi buku ini terbagi atas dua bagian. Bagian pertama akan meliputi deret dan transformasi Fourier serta penggunaannya, yang merupakan materi klasik, sebagaimana dibahas dalam buku “Fourier Analysis and Its Applications” karangan G.B. Folland (Wadsworth, 1992). Sementara itu pada bagian kedua kita akan berkenalan dengan wavelet, materi yang relatif baru dan sedang ‘in’ dewasa ini. Bagian kedua akan menyinggung pula dasar-dasar pemrosesan signal dan penggunaan wavelet dalam bidang tersebut.

Untuk memahami materi buku ini, Anda diasumsikan telah menguasai materi Analisis Real (yang membahas konsep himpunan, bilangan real, fungsi, barisan, turunan, dan integral Riemann) dan Aljabar Linear Elementer (yang membahas ruang vektor, hasil kali skalar, dan lain-lain). Akan lebih menguntungkan bila Anda telah pula mempelajari Fungsi Kompleks, namun ini bukan suatu keharusan.

0.1 Notasi dan istilah, bilangan kompleks

Sebelum kita masuk ke materi utama, ada baiknya kita sepakati terlebih dahulu sejumlah notasi dan istilah yang akan kita pakai berulang-ulang.

Himpunan semua bilangan asli $\{1, 2, 3, \dots\}$ dinyatakan sebagai \mathbf{N} , sementara himpunan semua bilangan bulat $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ dituliskan sebagai \mathbf{Z} . Himpunan

semua bilangan real dinyatakan sebagai \mathbf{R} , sementara himpunan semua bilangan kompleks dituliskan sebagai \mathbf{C} . Notasi berikut menyatakan interval di \mathbf{R} :

$$[a, b] := \{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\}, \quad (a, b) := \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\},$$

$$[a, b) := \{x \in \mathbf{R} : a \leq x < b\}, \quad (a, b] := \{x \in \mathbf{R} : a < x \leq b\}.$$

Pada umumnya kita akan bekerja dengan fungsi dari \mathbf{R} ke \mathbf{C} , yakni fungsi yang terdefinisi di \mathbf{R} (biasanya pada suatu interval di \mathbf{R}) dan bernilai kompleks. Namun sesekali kita akan membahas pula fungsi peubah banyak yang terdefinisi di \mathbf{R}^d ($d \in \mathbf{N}$) dan bernilai kompleks. Di sini \mathbf{R}^d menyatakan himpunan semua titik $x = (x_1, \dots, x_d)$ dengan $x_j \in \mathbf{R}$, $j = 1, \dots, d$.

Mengingat bahwa kita akan senantiasa berhadapan dengan fungsi yang bernilai kompleks, di bawah ini kita tinjau kembali sejumlah sifat dasar bilangan kompleks, yang mungkin telah Anda pelajari dalam kuliah Fungsi Kompleks.

Bilangan kompleks dapat disajikan sebagai $z := a + bi$ dengan $a, b \in \mathbf{R}$ dan i adalah bilangan *imaginer* yang memenuhi $i^2 = -1$. (Terdapat dua akar persamaan $z^2 = -1$, bilangan i merupakan *akar utama*-nya.) Dalam hal ini a disebut *bagian real* dari z , ditulis $\operatorname{Re}(z) := a$; sementara b disebut *bagian imaginer* dari z , ditulis $\operatorname{Im}(z) := b$. Penjumlahan dan perkalian dua buah bilangan kompleks dapat dilakukan seperti halnya terhadap dua buah bilangan real:

$$(a + bi) + (c + di) := (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi)(c + di) := (ac - bd) + (bc + ad)i.$$

Himpunan semua bilangan kompleks \mathbf{C} dapat dipandang sebagai bidang \mathbf{R}^2 (lihat Gambar 0.1). *Modulus* bilangan kompleks $z = a + bi$, ditulis $|z|$, diberikan oleh $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$, yang menyatakan jarak Euclid dari z ke 0. Sebagaimana di \mathbf{R} , kita mempunyai Ketaksamaan Segitiga di \mathbf{C} : untuk setiap $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ berlaku

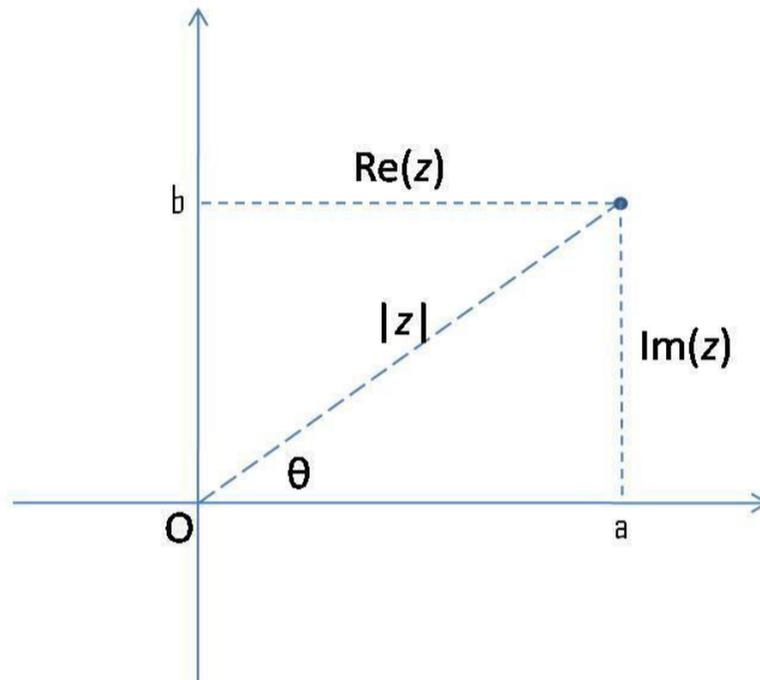
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Diberikan bilangan kompleks z , kita mempunyai \bar{z} , yang menyatakan *konjugasi* atau *kawan* dari z , yakni $\bar{z} := a - bi$. Untuk setiap $z \in \mathbf{C}$, berlaku

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}),$$

$$|z|^2 = z\bar{z}, \quad z \text{ real j.h.j. } z = \bar{z}.$$

(Catatan: Di sini ‘j.h.j.’ merupakan singkatan dari ‘jika dan hanya jika’.)



Gambar 0.1: Bidang Kompleks

Sebagai alternatif, bilangan kompleks sering pula dituliskan dalam bentuk polar:

$$z := re^{i\theta},$$

dengan $r = |z|$ dan $\theta = \arg(z) =$ sudut yang dibentuk vektor z dengan sumbu real positif. Kita mempunyai *rumus Euler*:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Sebagai contoh, untuk $\theta = \pi$, kita mempunyai $e^{i\pi} = -1$, sebuah persamaan yang melibatkan empat bilangan penting yaitu $1, i, e$, dan π serta tanda minus.

Berbeda dari polinom real, setiap polinom kompleks senantiasa mempunyai akar, sebagaimana dijamin oleh teorema berikut:

Teorema A (Teorema Dasar Aljabar). Misalkan $P(z) := a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$ dengan $a_n \neq 0$ dan $n \in \mathbf{N}$. Maka, terdapat bilangan $\alpha \in \mathbf{C}$ sedemikian sehingga $P(\alpha) = 0$.

0.2 Ruang Hilbert

Ruang Hilbert merupakan abstraksi alami dari \mathbf{R}^3 , yang memiliki struktur linear vektor, hasilkali dalam, dan sifat kelengkapan.

Misalkan H ruang vektor atas \mathbf{C} . Pemetaan $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbf{C}$ yang memenuhi

$$(i) \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle \quad \forall x, y, z \in H, \alpha, \beta \in \mathbf{C},$$

$$(ii) \overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in H,$$

$$(iii) \langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in H,$$

$$(iv) \langle x, x \rangle = 0 \text{ j.h.j. } x = 0,$$

disebut *hasilkali dalam* pada H . Ruang vektor H atas \mathbf{C} yang dilengkapi dengan hasilkali dalam $\langle \cdot, \cdot \rangle$ disebut *ruang hasilkali dalam*.

Pada ruang hasilkali dalam H dengan hasilkali dalam $\langle \cdot, \cdot \rangle$, kita dapat mendefinisikan *norma*

$$\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2},$$

yang memenuhi keempat sifat berikut:

$$(i) \|x\| \geq 0 \quad \forall x \in H,$$

$$(ii) \|x\| = 0 \text{ j.h.j. } x = 0,$$

$$(iii) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall x \in H, \alpha \in \mathbf{C},$$

$$(iv) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in H \text{ (Ketaksamaan Segitiga).}$$

Ketaksamaan Segitiga di atas dapat dibuktikan dengan menggunakan Ketaksamaan Cauchy-Schwarz:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \quad \forall x, y \in H.$$

Selanjutnya, untuk setiap $x, y \in H$, berlaku

$$\text{Hukum Jajarangenjang: } \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2);$$

$$\text{Kesamaan Polarisasi: } \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} [\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2].$$

Pada ruang hasilkali dalam H yang telah dilengkapi dengan norma $\|\cdot\|$ kita dapat pula mendefinisikan *metrik*

$$d(x, y) := \|x - y\|,$$

yang memenuhi keempat sifat berikut:

- (i) $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in H$,
- (ii) $d(x, y) = 0$ j.h.j. $x = y$,
- (iii) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in H$,
- (iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in H$ (Ketaksamaan Segitiga).

Sebagai ruang metrik atau ruang bernorma, H dikatakan *lengkap* apabila setiap barisan Cauchy (x_n) di H , yang memenuhi $d(x_m, x_n) \rightarrow 0$ ($m, n \rightarrow \infty$), konvergen dalam norma ke suatu titik $x \in H$, yakni $d(x_n, x) = \|x_n - x\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Ruang bernorma yang lengkap disebut *ruang Banach*. Ruang hasilkali dalam H disebut *ruang Hilbert* apabila ia, sebagai ruang bernorma, merupakan ruang Banach. Contoh klasik ruang Hilbert adalah \mathbf{C}^d , himpunan semua titik (z_1, \dots, z_d) dengan $z_j \in \mathbf{C}$, $j = 1, \dots, d$, yang dilengkapi dengan hasilkali dalam baku $\langle z, w \rangle := \sum_{j=1}^d z_j \bar{w}_j$.

Pembahasan tentang ruang Hilbert yang lebih mendalam dapat pula ditemui misalnya dalam buku “An Introduction to Hilbert Space” karangan N. Young (Cambridge Univ. Press, 1988).

0.3 Ukuran Lebesgue di \mathbf{R}

Dalam Analisis Real, Anda telah mempelajari konsep integral Riemann. Dalam kuliah ini kita akan bekerja dengan integral Lebesgue, yang merupakan suatu perumuman dari integral Riemann. Walaupun Anda tidak akan dituntut untuk memahami konsep integral Lebesgue secara mendalam, ada baiknya Anda berkenalan dengan konsep ukuran Lebesgue yang mendasarinya pada kesempatan ini.

Panjang interval terbatas $I \subseteq \mathbf{R}$ yang mempunyai titik ujung a dan b didefinisikan sebagai $|I| := b - a$. Panjang interval tak terbatas didefinisikan sebagai ∞ . Sekarang misalkan A suatu himpunan di \mathbf{R} . Keluarga terbilang interval $\{I_j\}$ dikatakan *meliputi* A apabila $A \subseteq \bigcup_j I_j$. *Ukuran luar* A kemudian didefinisikan sebagai

$$m^*(A) := \inf\{\sum_j |I_j| : \{I_j\} \text{ meliputi } A\}.$$

Jelas bahwa ukuran luar sebuah interval sama dengan panjangnya, yakni $m^*(I) = |I|$. Tidak tertutup kemungkinan terjadi $m^*(A) = \infty$ untuk suatu $A \subseteq \mathbf{R}$. Secara umum, $m^*(A) \in [0, \infty]$.

Himpunan $A \subseteq \mathbf{R}$ dikatakan *terukur* apabila untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat himpunan tertutup $F \subseteq A$ dan himpunan terbuka $G \supseteq A$ sedemikian sehingga $m^*(G \setminus F) < \epsilon$. (Himpunan H dikatakan *terbuka* di \mathbf{R} apabila untuk setiap $x \in H$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $(x - \delta, x + \delta) \subseteq H$; dan H dikatakan *tertutup* apabila $\mathbf{R} \setminus H$ terbuka.)

Tidak terlalu sukar untuk memeriksa bahwa: jika A terukur, maka A' juga terukur; jika A dan B terukur, maka $A \cap B$ juga terukur; dan jika A_k terukur untuk setiap $k \in \mathbf{N}$, maka $\bigcup_{k \in \mathbf{N}} A_k$ juga terukur. Keluarga himpunan $\mathcal{M} = \{A \subseteq \mathbf{R} : A \text{ terukur}\}$ merupakan suatu *aljabar- σ* , yakni memenuhi:

- (i) $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A' \in \mathcal{M}$,
- (ii) $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{M}$,
- (iii) $A_k \in \mathcal{M}, k \in \mathbf{N} \Rightarrow \bigcup_{k \in \mathbf{N}} A_k \in \mathcal{M}$.

Keluarga \mathcal{M} memuat semua himpunan terbuka, himpunan tertutup, himpunan F_σ (gabungan sejumlah terbilang himpunan tertutup), dan himpunan G_δ (irisan sejumlah terbilang himpunan terbuka) di \mathbf{R} . Fungsi m^* yang dibatasi pada \mathcal{M} dikenal sebagai *ukuran Lebesgue* pada \mathbf{R} , biasa dilambangkan dengan m .

Himpunan $A \subseteq \mathbf{R}$ dikatakan *berukuran nol* apabila $m^*(A) = 0$. Himpunan berukuran nol jelas terukur, dengan $m(A) = m^*(A) = 0$. Setiap himpunan terbilang jelas merupakan himpunan berukuran nol.

Suatu sifat atau pernyataan P pada \mathbf{R} dikatakan berlaku *hampir di mana-mana* (*h.d.m.*) apabila P berlaku pada seluruh \mathbf{R} kecuali pada suatu himpunan berukuran nol. Sebagai contoh, fungsi $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ yang didefinisikan oleh $f(x) := 0$ jika x irasional dan $f(x) := 1$ jika x rasional, dapat dikatakan sama dengan nol hampir di mana-mana.

Himpunan berukuran nol mempunyai peran yang cukup penting dalam teori integral. Misalnya kita mempunyai teorema berikut:

Teorema B (Kriteria keterintegralan Riemann). *Misalkan $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ terbatas. Maka, f terintegralkan Riemann pada $[a, b]$ jika dan hanya jika f kontinu pada $[a, b]$ kecuali pada suatu himpunan berukuran nol.*

Dengan konsep ukuran Lebesgue, integral Riemann dapat diperumum menjadi integral Lebesgue — namun kita tidak akan membahasnya di sini. Pada umumnya kita

akan bekerja dengan fungsi yang kontinu hampir di mana-mana, dan dalam hal ini integral Lebesgue dapat dianggap sebagai integral Riemann. Beberapa teorema, seperti halnya teorema Fubini dan teorema Lebesgue tentang kekonvergenan barisan fungsi yang terdominasi, akan kita pakai begitu saja bilamana diperlukan. Bila pembaca ingin memahami konsep ukuran dan integral Lebesgue lebih jauh, silakan baca buku “Real Analysis” karangan H.L. Royden (Prentice Hall, 1988), “Real and Complex Analysis” karangan W. Rudin (McGraw-Hill, 1986), atau buku lain yang membahas hal ini.

0.4 Soal latihan

1. Buktikan bahwa $|z - 1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ untuk setiap $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$.
2. Buktikan ketaksamaan Cauchy-Schwarz di ruang hasilkali dalam $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \quad x, y \in H.$$

3. (a) Buktikan bahwa himpunan $A := \{1, 2, \dots, 10\}$ berukuran nol.
 (b) Buktikan bahwa himpunan semua bilangan asli \mathbf{N} berukuran nol.
 (c) Buktikan bahwa himpunan semua bilangan rasional \mathbf{Q} berukuran nol.

1. Mengapa Deret Fourier

Di bawah ini diberikan dua contoh pemicu materi deret Fourier. Kedua contoh yang dipilih untuk dikemukakan di sini berkaitan dengan persamaan difusi atau persamaan panas untuk seutas kawat yang mengalami perubahan panas.

1.1 Persamaan panas untuk kawat lurus

Misalkan kita mempunyai seutas kawat yang panjangnya L dan penampangnya berbentuk lingkaran, terinsulasi pada permukaannya (sehingga suhu hanya dapat keluar atau masuk melalui kedua ujungnya), dan suhu pada kedua ujungnya dipertahankan tetap sama dengan nol.



Gambar 1.1: Kawat $[0, L]$

Bila kawat tersebut kemudian mengalami perubahan panas (katakan karena dipanasi), maka suhu pada kawat tersebut akan memenuhi *persamaan panas* atau *persamaan difusi*

$$u_t = ku_{xx}$$

dengan *syarat batas*

$$u(0, t) = u(L, t) = 0.$$

Di sini $u(x, t)$ menyatakan suhu kawat pada posisi $x \in [0, L]$ dan saat $t \geq 0$, u_t turunan parsial terhadap t , dan u_{xx} turunan parsial kedua terhadap x ; sementara k adalah konstanta difusi.

Dengan *pemisahan peubah*, kita misalkan $u(x, t) := X(x)T(t)$. Maka, kita akan peroleh

$$X(x)T'(t) = kX''(x)T(t)$$

$$X(0) = X(L) = 0.$$

Dengan membagi kedua ruas persamaan dengan $kX(x)T(t)$, kita dapatkan

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Karena ruas kiri hanya bergantung pada t , sementara ruas kanan hanya bergantung pada x , kedua ruas tersebut mestilah sama dengan suatu konstanta A , sehingga

$$T'(t) = AkT(t), \quad (1)$$

$$X''(x) = AX(x). \quad (2)$$

Persamaan (1) merupakan persamaan diferensial biasa orde 1 (dalam t); solusi umumnya adalah

$$T(t) = C_0 e^{Akt}, \quad t \geq 0.$$

Sementara itu, persamaan (2) merupakan persamaan diferensial biasa orde 2 (dalam x); solusi umumnya adalah

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x, \quad 0 \leq x \leq L,$$

dengan $\lambda = \sqrt{-A}$ menyatakan bilangan kompleks yang memenuhi persamaan $\lambda^2 + A = 0$. (Secara umum A merupakan konstanta kompleks.)

Persyaratan $X(0) = 0$ memaksa $C_1 = 0$, dan $X(L) = 0$ memberikan $C_2 \sin \lambda L = 0$. Dengan menganggap $C_2 \neq 0$, kita peroleh $\sin \lambda L = 0$ yang berarti bahwa $\lambda L = n\pi$ dan karenanya $A = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, dengan $n \in \mathbf{Z}$. Namun kita di sini cukup mengambil $n \in \mathbf{N}$ mengingat kasus $n = 0$ hanya menghasilkan solusi nol dan penggantian n dengan $-n$ sama saja dengan penggantian C_2 dengan $-C_2$. Dengan demikian kita peroleh solusi

$$u_n(x, t) = e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0,$$

untuk setiap $n \in \mathbf{N}$. Dengan mengambil kombinasi linearnya dan dengan proses limit, kita mempunyai solusi yang berbentuk deret

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0,$$

dengan $a_n \in \mathbf{R}$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.

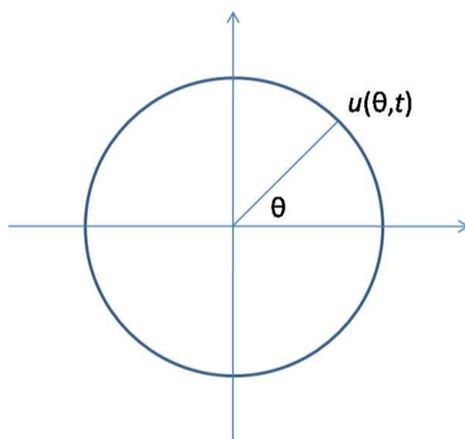
Misalkan, sebagai informasi tambahan, diketahui *syarat awal* $u(x, 0) := f(x)$, $x \in [0, L]$. Solusi di atas akan memenuhi syarat ini jika dan hanya jika koefisien a_n memenuhi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 \leq x \leq L.$$

Masalahnya kemudian adalah adakah a_n yang memenuhi persamaan ini dan, bila ada, bagaimana menentukannya.

1.2 Persamaan panas untuk kawat melingkar

Misalkan kawat tadi ditekuk sehingga membentuk lingkaran (dengan kedua ujungnya bertemu) dan kita ingin mengetahui distribusi panas pada kawat bila kawat tersebut dipanasi. Di sini posisi setiap titik ditentukan oleh sudut θ (yang diukur terhadap sumbu acuan) dan suhu di titik tersebut pada saat t adalah $u(\theta, t)$.



Gambar 1.2: Kawat Melingkar

Karena jarak linear pada lingkaran sebanding dengan jarak sudut ($x = r\theta$, dengan r menyatakan jari-jari lingkaran), persamaan difusi $u_t = k u_{xx}$ menjadi

$$u_t = k_0 u_{\theta\theta}$$

dengan $k_0 := \frac{k}{r^2}$. Dengan menuliskan $u(\theta, t) := \Theta(\theta)T(t)$, kita peroleh (seperti sebelumnya)

$$T(t) = C_0 e^{Ak_0 t}, \quad t \geq 0,$$

$$\Theta(\theta) = C_1 \cos \theta \sqrt{-A} + C_2 \sin \theta \sqrt{-A}, \quad \theta \in \mathbf{R},$$

untuk suatu konstanta kompleks A .

Sekarang kita tidak mempunyai persyaratan batas karena lingkaran tidak berujung. Namun, mengingat θ dan $\theta + 2n\pi$ menyatakan sebuah titik yang sama, fungsi $\Theta(\theta)$ mestilah periodik dengan periode 2π :

$$\Theta(\theta + 2n\pi) = \Theta(\theta) \quad \forall \theta \in [0, 2\pi), \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Syarat ini tidak ‘membunuh’ C_1 ataupun C_2 , tetapi memaksa $\sqrt{-A} = n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, sehingga pada akhirnya kita dapatkan solusi yang berbentuk

$$u(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) e^{-n^2 k_0 t}, \quad \theta \in \mathbf{R}, \quad t \geq 0.$$

Jika diketahui syarat awal $u(\theta, 0) := f(\theta)$, maka kita peroleh

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \quad \theta \in \mathbf{R}.$$

Masalahnya lagi-lagi adalah apakah f , yang merupakan fungsi periodik dengan periode 2π , dapat dinyatakan sebagai deret seperti di atas dan, bila dapat, bagaimana menentukan koefisien a_n dan b_n yang memenuhi persamaan tersebut.

Deret trigonometri pada ruas kanan persamaan di atas kelak disebut sebagai *deret Fourier*, sementara bilangan-bilangan a_n dan b_n (yang bergantung pada fungsi f yang diberikan) disebut sebagai *koefisien Fourier*. Tanda “=” pada persamaan tersebut berarti bahwa deret pada ruas kanan konvergen ke nilai fungsi f di titik θ . Secara umum, kekonvergenan ini hanya berlaku hampir di mana-mana, tidak ‘titik demi titik’.

1.3 Soal latihan

1. Tinjau *persamaan gelombang* $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ untuk seutas kawat yang panjangnya L , dengan syarat batas

$$u(0, t) = u(L, t) = 0$$

dan syarat awal

$$u(x, 0) = f(x) \text{ dan } u_t(x, 0) = g(x).$$

Dengan pemisahan peubah, peroleh solusi berupa deret

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{L} \left(a_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + b_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0,$$

dengan a_n memenuhi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 \leq x \leq L,$$

dan b_n memenuhi

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 \leq x \leq L.$$

2. Deret Fourier

Pada bab ini kita akan membahas deret Fourier dari fungsi periodik. Pendekatan yang dipilih dalam diktat ini sama dengan pendekatan dalam buku “Fourier Analysis and Its Applications” karangan G.B. Folland (Wadsworth, 1992).

Untuk kemudahan kita akan lebih banyak bekerja dengan fungsi eksponensial kompleks $e^{i\theta}$ daripada fungsi trigonometri $\cos \theta$ dan $\sin \theta$. Ingat bahwa fungsi-fungsi ini terkait oleh rumus

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta,$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \quad \text{dan} \quad \sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}).$$

Kelebihan fungsi cosinus dan sinus adalah bahwa mereka bernilai real dan mempunyai sifat simetri, sementara kelebihan fungsi eksponensial adalah rumus turunan $(e^{i\theta})' = ie^{i\theta}$ dan rumus jumlah $e^{i(\theta+\phi)} = e^{i\theta}e^{i\phi}$ yang relatif lebih sederhana.

2.1 Deret Fourier dari fungsi periodik

Misalkan $f(\theta)$ adalah sebuah fungsi bernilai kompleks yang terdefinisi pada \mathbf{R} sedemikian sehingga

$$f(\theta + 2\pi) = f(\theta) \quad \forall \theta \in \mathbf{R},$$

yakni f *periodik* dengan *periode* 2π . Asumsikan pula bahwa f terintegralkan Riemann pada sebarang interval terbatas. (Ini dipenuhi bila f terbatas dan kontinu kecuali pada suatu himpunan berukuran nol).

Kita ingin mengetahui kapanakah f dapat diuraikan sebagai deret

$$f(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta).$$

Di sini $\frac{1}{2}a_0$ merupakan koefisien fungsi konstan $1 = \cos 0\theta$, dan faktor $\frac{1}{2}$ sengaja diikutsertakan untuk alasan yang akan kita lihat nanti. Tidak ada b_0 karena $\sin 0\theta = 0$.

Menggunakan rumus di atas, persamaan tadi dapat dituliskan sebagai

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$$

dengan

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0; \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \text{ dan } c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n), \quad n \in \mathbf{N}$$

atau

$$a_0 = 2c_0; \quad a_n = c_n + c_{-n} \text{ dan } b_n = i(c_n - c_{-n}), \quad n \in \mathbf{N}.$$

Untuk menjawab pertanyaan di atas, kita mencoba terlebih dahulu mencari syarat perlunya. Jika kita mempunyai persamaan di atas, bagaimana koefisien c_n dapat dihitung dalam f ? Dengan mengalikan kedua ruas dengan $e^{-ik\theta}$ ($k \in \mathbf{Z}$), kemudian integralkan dari $-\pi$ sampai π , kita peroleh (dengan menganggap bahwa integral deret sama dengan deret integral)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)\theta} d\theta.$$

Tetapi untuk $n \neq k$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)\theta} d\theta = \frac{1}{i(n-k)} e^{i(n-k)\theta} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

sementara untuk $n = k$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)\theta} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = 2\pi.$$

Jadi satu-satunya suku yang bertahan dalam deret tadi adalah suku ke- k , sehingga kita dapatkan

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} d\theta = 2\pi c_k.$$

Dengan menamai kembali k sebagai n , kita peroleh rumus untuk koefisien c_n , yakni

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Dari sini kita peroleh

$$a_0 = 2c_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta$$

dan untuk $n = 1, 2, 3, \dots$

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta.$$

Perhatikan bahwa rumus untuk a_n berlaku pula untuk $n = 0$ karena faktor $\frac{1}{2}$ yang sengaja telah kita ikutsertakan sejak awal. (Jadi inilah alasannya mengapa ada faktor $\frac{1}{2}$ di depan a_0 .)

Selanjutnya, jika f periodik dengan periode 2π dan terintegralkan pada $[-\pi, \pi]$, maka bilangan c_n , atau a_n dan b_n , sebagaimana dirumuskan di atas, disebut sebagai *koefisien Fourier* dari f , sementara deret

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} \quad \text{atau} \quad \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

disebut sebagai *deret Fourier* dari f .

Catat bahwa yang telah kita dapatkan saat ini baru syarat perlunya saja, belum syarat cukup. Yakni, jika kita mempunyai sebuah fungsi f yang periodik dengan periode 2π dan terintegralkan pada $[-\pi, \pi]$, maka kita dapat menghitung koefisien-koefisien Fourier dan deret Fourier dari fungsi tersebut. Namun pertanyaan apakah f sama dengan deret Fouriernya, atau apakah deret Fourier dari f konvergen (titik demi titik) ke f , sama sekali belum terjawab.

2.2 Contoh Deret Fourier dan Ketaksamaan Bessel

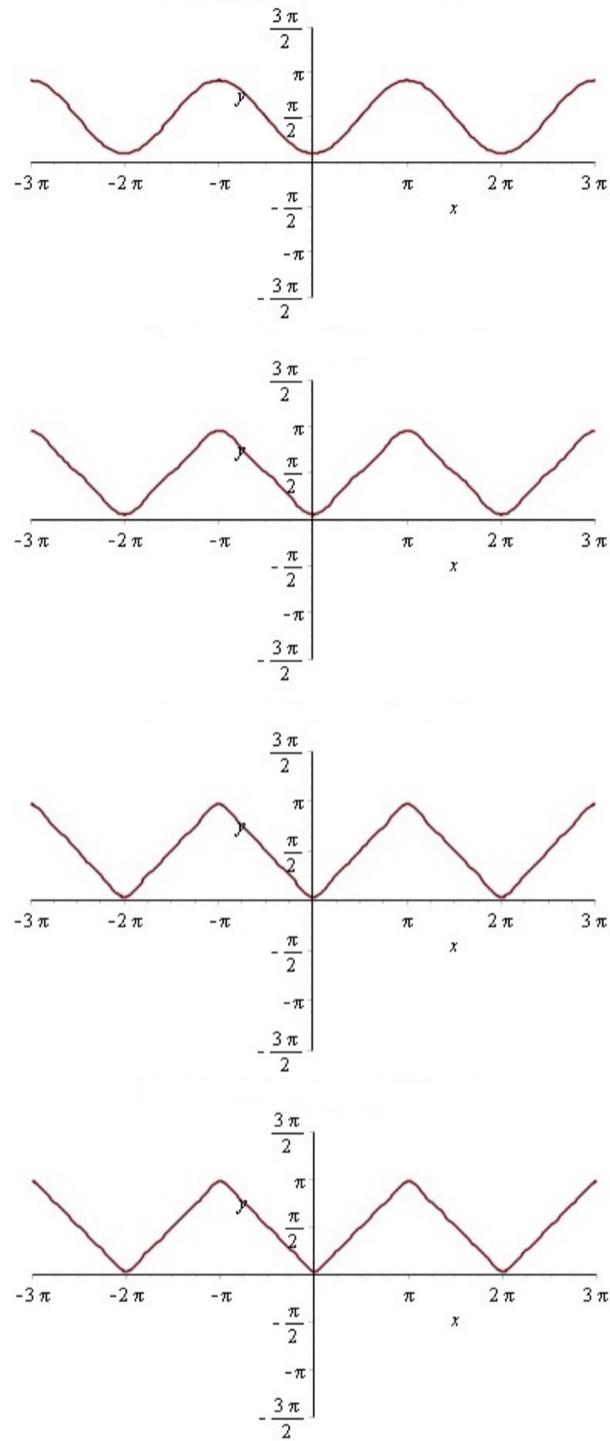
Sebelum kita menjawab pertanyaan penting tadi, kita tinjau terlebih dahulu dua buah contoh berikut.

Contoh 1. Misalkan f periodik dengan periode 2π dan

$$f(\theta) := |\theta|, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi.$$

Maka, dengan mengingat bahwa f merupakan fungsi genap, kita peroleh $a_0 = \pi$, $a_n = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$ dan $b_n = 0$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$. Perhatikan bahwa $(-1)^n - 1 = 0$ bila n genap, dan $(-1)^n - 1 = -2$ bila n ganjil. Dengan demikian deret Fourier dari f adalah

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^2} \cos n\theta.$$



Gambar2.2a: Jumlah parsial deret Fourier dari $f(\theta) := |\theta|$

Gambar di atas mengindikasikan bahwa deret Fourier dari f konvergen ke fungsi f secara ‘titik demi titik’. Hal ini akan kita justifikasi pada bab berikutnya.

Contoh 2. Misalkan g periodik dengan periode 2π dan

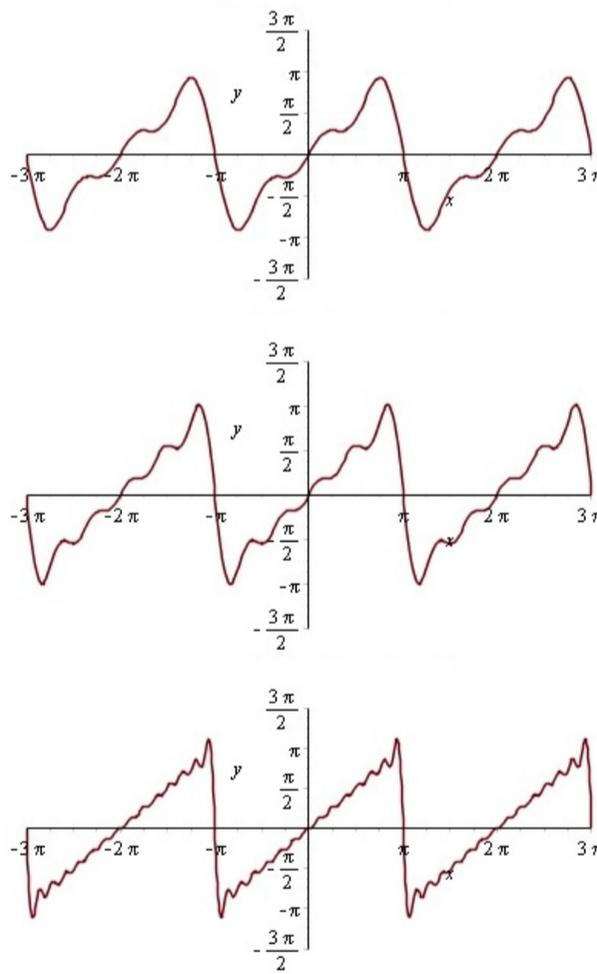
$$g(\theta) := \theta, \quad -\pi < \theta \leq \pi.$$

Maka $c_0 = 0$ dan $c_n = \frac{(-1)^{n+1}}{in}$ untuk setiap $n \neq 0$. Jadi deret Fourier dari g adalah

$$\sum_{n \neq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{in} e^{in\theta}$$

atau, mengingat $(-1)^n = (-1)^{-n}$ dan $\frac{e^{in\theta}}{in} + \frac{e^{-in\theta}}{-in} = \frac{2}{n} \sin n\theta$,

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\theta.$$



Gambar 2.2b: Jumlah parsial deret Fourier dari $g(\theta) := \theta$

Perhatikan bagaimana deret Fourier dari g menghampiri fungsi g , khususnya di titik-titik diskontinuitas g . Apa yang sebenarnya terjadi akan dijelaskan pada bab berikutnya. (Pelajari pula tentang fenomena Gibbs pada §5.4.)

Ketaksamaan berikut memberikan suatu hampiran untuk koefisien Fourier, yang kelak diperlukan dalam pembahasan kekonvergenan deret Fourier.

Teorema A (Ketaksamaan Bessel). *Jika f periodik dengan periode 2π dan terintegralkan Riemann pada $[-\pi, \pi]$, maka koefisien Fourier c_n yang ditentukan oleh rumus di atas memenuhi ketaksamaan*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta.$$

Catatan. Keterintegralan $|f|^2$ terjamin karena $|f|^2$ kontinu kecuali pada suatu himpunan berukuran nol, seperti halnya f . Selanjutnya, mengingat $|a_0|^2 = 4|c_0|^2$ dan $|a_n|^2 + |b_n|^2 = 2(|c_n|^2 + |c_{-n}|^2)$ untuk $n \geq 1$, kita peroleh

$$\frac{1}{4}|a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta.$$

Bukti. Karena $|z|^2 = z\bar{z}$, maka untuk setiap $\theta \in [-\pi, \pi]$ dan $N \in \mathbf{N}$ berlaku

$$\left| f(\theta) - \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\theta} \right|^2 = |f(\theta)|^2 - \sum_{n=-N}^N [c_n \overline{f(\theta)} e^{in\theta} - \bar{c}_n f(\theta) e^{-in\theta}] + \sum_{m,n=-N}^N c_m \bar{c}_n e^{i(m-n)\theta}.$$

Bagi kedua ruas dengan 2π dan integralkan pada $[-\pi, \pi]$ (dengan mengingat rumus koefisien c_n pada §2.1), untuk memperoleh

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(\theta) - \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\theta} \right|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta - \sum_{n=-N}^N |c_n|^2.$$

Karena integral di ruas kiri tak mungkin negatif, maka

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta \geq \sum_{n=-N}^N |c_n|^2,$$

dan ini berlaku untuk setiap $N \in \mathbf{N}$. [QED]

Akibat B (Lemma Riemann-Lebesgue). *Koefisien Fourier c_n menuju 0 bila $|n| \rightarrow \infty$. Koefisien Fourier a_n dan b_n menuju 0 bila $n \rightarrow \infty$.*

Bukti. Karena $|a_n|^2$, $|b_n|^2$, dan $|c_n|^2$ merupakan suku ke- n dari suatu deret yang konvergen, mereka menuju 0 dan demikian pula halnya dengan a_n , b_n , dan c_n . [QED]

2.3 Soal latihan

1. Verifikasi hubungan antara a_n , b_n , dan c_n yang dibahas pada §2.1, yakni

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0; \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \text{ dan } c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n), \quad n \in \mathbf{N}$$

atau

$$a_0 = 2c_0; \quad a_n = c_n + c_{-n} \text{ dan } b_n = i(c_n - c_{-n}), \quad n \in \mathbf{N}.$$

2. (a) Verifikasi hasil perhitungan koefisien a_n dan b_n pada Contoh 1.
(b) Verifikasi hasil perhitungan koefisien c_n pada Contoh 2.
3. Misalkan $h = h(\theta)$ fungsi periodik dengan periode 2π dan

$$h(\theta) := \begin{cases} 1, & \text{jika } 0 \leq \theta \leq \pi, \\ -1, & \text{jika } -\pi < \theta < 0. \end{cases}$$

Tentukan deret Fourier dari h , lalu sketsalah grafik jumlah parsial pertama dan kedua dari deret tersebut.

4. Verifikasi hubungan antara $|a_n|$, $|b_n|$, dan $|c_n|$ yang dinyatakan sebagai Catatan di bawah Teorema A.

3. Kekonvergenan Deret Fourier

Sekarang kita akan membahas kekonvergenan deret Fourier, khususnya *kekonvergenan titik demi titik*. Melalui Contoh 2 yang dibahas pada bab sebelumnya kita mengetahui bahwa secara umum deret Fourier dari suatu fungsi tidak selalu konvergen titik demi titik ke fungsi semula, khususnya di titik di mana fungsi tersebut diskontinu. Namun, kita akan melihat bila fungsi tersebut memenuhi sejumlah hipotesis tertentu, maka deret Fourier-nya akan konvergen titik demi titik.

3.1 Jumlah parsial dan intuisi melalui kernel Dirichlet

Untuk menjawab pertanyaan apakah deret

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

atau deret

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta},$$

dengan a_n , b_n , dan c_n sebagaimana diberikan sebelumnya, konvergen ke $f(\theta)$, kita tinjau jumlah parsialnya, yakni

$$S_N^f(\theta) := \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\theta} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta).$$

(Ketika kita bekerja dengan bentuk eksponensial, kita sepakat bahwa kita senantiasa menyatukan suku $e^{in\theta}$ dan $e^{-in\theta}$. Itu sebabnya kita harus menyelidiki jumlah parsial ‘simetris’ di atas.)

Jika kita substitusikan rumus untuk c_n ke dalam jumlah parsial tadi, maka kita akan mendapatkan

$$S_N^f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) e^{in(\theta-\psi)} d\psi = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) e^{in(\psi-\theta)} d\psi.$$

Selanjutnya, dengan substitusi peubah $\phi := \psi - \theta$ dan mengingat bahwa f periodik dengan periode 2π , kita peroleh

$$S_N^f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-N}^N \int_{-\pi+\theta}^{\pi+\theta} f(\theta + \phi) e^{in\phi} d\phi = \frac{1}{2\pi} \sum_{-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta + \phi) e^{in\phi} d\phi.$$

Karena $\sum_{-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} \dots = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-N}^N \dots$, kita dapat menuliskan

$$S_N^f(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta + \phi) D_N(\phi) d\phi,$$

dengan $D_N(\phi) := \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N e^{in\phi}$.

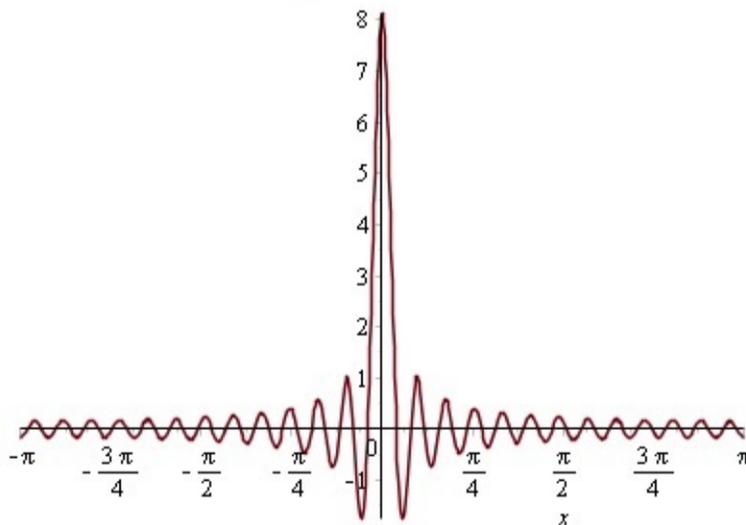
Fungsi $D_N(\phi)$ dikenal sebagai *kernel Dirichlet*. Dengan mengenalinya sebagai deret geometri, dengan suku pertama $e^{-iN\phi}$ dan rasio $e^{i\phi}$, kita dapat menyederhanakannya sebagai

$$D_N(\phi) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(N+1)\phi} - e^{-iN\phi}}{e^{i\phi} - 1}.$$

Selanjutnya, dengan mengalikan pembilang dan penyebut dengan $e^{-i\phi/2}$, kita peroleh

$$D_N(\phi) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(N+1/2)\phi} - e^{-i(N+1/2)\phi}}{e^{i\phi/2} - e^{-i\phi/2}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(N + 1/2)\phi}{\sin \phi/2}.$$

Grafik $D_N(\phi)$ untuk $N = 25$ berbentuk seperti di bawah ini.



Gambar 3.1: Grafik kernel Dirichet $D_{25}(\phi)$

Intuisi yang mendorong kita untuk menyimpulkan bahwa $S_N^f(\theta) \rightarrow f(\theta)$ adalah sebagai berikut: titik puncak $D_N(\phi)$ yang terjadi di $\phi = 0$ ‘memetik’ nilai $f(\theta)$ pada $S_N^f(\theta)$; sementara osilasi cepat yang terjadi pada $D_N(\phi)$ untuk ϕ jauh dari 0 ‘membunuh’ bagian lainnya karena adanya pencoretan antara nilai positif dan negatif.

3.2 Kekonvergenan titik demi titik dan seragam

Untuk membuktikan kekonvergenan titik demi titik deret Fourier, kita memerlukan lemma berikut mengenai kernel Dirichlet dan sejumlah peristilahan.

Lemma A (Kernel Dirichlet). *Untuk setiap $N \in \mathbf{N}$ berlaku*

$$\int_{-\pi}^0 D_N(\theta) d\theta = \int_0^{\pi} D_N(\theta) d\theta = \frac{1}{2}.$$

Bukti. Dari rumus untuk D_N , kita mempunyai

$$D_N(\theta) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \cos n\theta,$$

sehingga

$$\int_0^{\pi} D_N(\theta) d\theta = \left[\frac{\theta}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{\sin n\theta}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}.$$

Serupa dengan itu,

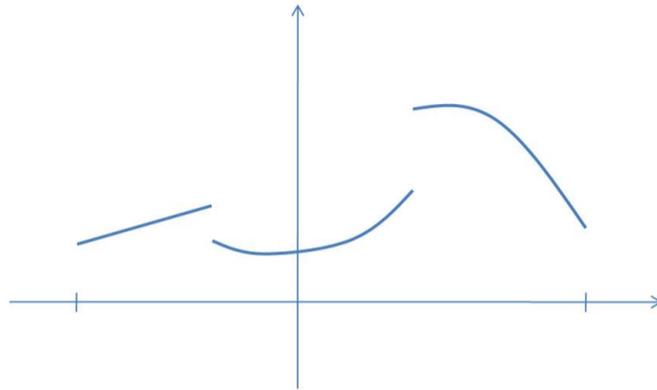
$$\int_{-\pi}^0 D_N(\theta) d\theta = \frac{1}{2},$$

sebagaimana diharapkan. [QED]

Misalkan $-\infty < a < b < \infty$. Kita katakan bahwa f *kontinu bagian demi bagian pada* $[a, b]$ apabila f kontinu pada $[a, b]$ kecuali mungkin di sejumlah terhingga titik, sebutlah x_1, \dots, x_k , dan di titik-titik ini f mempunyai limit kiri dan limit kanan. [Jika titik a atau b termasuk salah satu titik tersebut, maka f hanya dipersyaratkan mempunyai limit kanan saja (di a) atau limit kiri saja (di b).]

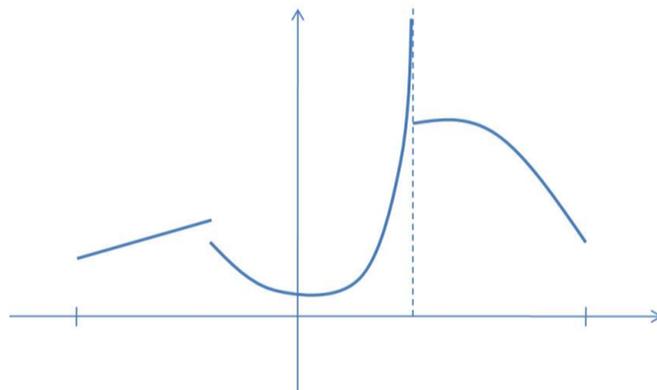
Lalu, kita katakan bahwa f *mulus bagian demi bagian pada* $[a, b]$ apabila f dan turunan pertamanya, yaitu f' , kontinu bagian demi bagian pada $[a, b]$. Dalam hal ini fungsi yang mempunyai diskontinuitas tak terhingga (seperti $f(x) = 1/x$ di $x = 0$) dan fungsi yang mempunyai patahan ‘vertikal’ (dengan turunan kiri atau turunan kanan

tak terhingga) tidak termasuk fungsi yang mulus bagian demi bagian. Sebagai ilustrasi, fungsi yang kontinu bagian demi bagian dapat berbentuk seperti pada gambar di bawah ini:



Gambar 3.2a: Fungsi kontinu bagian demi bagian

Fungsi pada gambar di atas juga mulus bagian demi bagian. Contoh fungsi yang tidak mulus bagian demi bagian misalnya fungsi seperti di bawah ini:



Gambar 3.2b: Bukan fungsi mulus bagian demi bagian

Selanjutnya, f dikatakan *kontinu (mulus) bagian demi bagian pada \mathbf{R}* apabila ia kontinu (mulus) bagian demi bagian pada sebarang interval terbatas $[a, b]$.

Teorema B (Kekonvergenan Titik Demi Titik). *Jika f periodik dengan periode 2π dan mulus bagian demi bagian pada \mathbf{R} , maka*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N^f(\theta) = \frac{1}{2}[f(\theta-) + f(\theta+)],$$

dengan $f(\theta-) := \lim_{h \rightarrow 0^-} f(\theta + h)$ dan $f(\theta+) := \lim_{h \rightarrow 0^+} f(\theta + h)$.

Bukti. Menurut Lemma Kernel Dirichlet, kita mempunyai

$$\frac{1}{2}f(\theta-) = f(\theta-) \int_{-\pi}^0 D_N(\phi)d\phi, \quad \frac{1}{2}f(\theta+) = f(\theta+) \int_0^{\pi} D_N(\phi)d\phi,$$

sehingga

$$S_N^f(\theta) - \frac{1}{2}[f(\theta-) + f(\theta+)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\phi)[e^{i(N+1)\phi} - e^{-iN\phi}]d\phi,$$

dengan

$$g(\phi) = \frac{f(\theta + \phi) - f(\theta-)}{e^{i\phi} - 1}, \quad -\pi < \phi < 0, \quad g(\phi) = \frac{f(\theta + \phi) - f(\theta+)}{e^{i\phi} - 1}, \quad 0 < \phi < \pi.$$

Di sini g terdefinisi dengan baik pada $[-\pi, \pi]$ dan sama mulusnya dengan f , kecuali di dekat $\phi = 0$. Namun, berdasarkan Aturan L'Hopital, g mempunyai limit kanan dan limit kiri di 0, sehingga g kontinu bagian demi bagian pada $[-\pi, \pi]$. Akibatnya, menurut Ketaksamaan Bessel, koefisien Fourier dari g , sebutlah C_n , akan menuju 0 bila $n \rightarrow \infty$. Sebagai selisih dua koefisien Fourier dari g , ekspresi di atas akan menuju 0 bila $N \rightarrow \infty$. [QED]

Teorema di atas memberitahu kita bahwa deret Fourier dari f konvergen titik demi titik ke f , kecuali mungkin di titik-titik diskontinuitas f . Bila kita definisikan ulang nilai f di titik-titik diskontinuitasnya sebagai nilai rata-rata limit kiri dan limit kanannya, maka deret Fourier dari f yang mulus bagian demi bagian pada \mathbf{R} akan konvergen titik demi titik pada \mathbf{R} . Lebih jauh, jika f juga kontinu pada \mathbf{R} , maka kita mempunyai teorema berikut.

Teorema C (Kekonvergenan Seragam). *Jika f periodik dengan periode 2π , kontinu, dan mulus bagian demi bagian pada \mathbf{R} , maka deret Fourier f konvergen mutlak dan secara seragam pada \mathbf{R} .*

Catatan. Teorema C dibuktikan dengan menggunakan deret Fourier untuk f' . Lihat Folland, hal. 41, untuk detilnya.

Contoh 1. Deret Fourier dari fungsi g pada Bab 2, Contoh 2, yang mulus bagian demi bagian dan kontinu kecuali di $\theta = k\pi$ dengan k ganjil, akan konvergen ke g kecuali di titik-titik tersebut. Karena itu, bila kita ambil $\theta = \pi/2$, maka kita dapatkan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

3.3 Soal latihan

1. Misalkan f dan g periodik dengan periode 2π dan mulus bagian demi bagian. Buktikan jika f dan g mempunyai koefisien Fourier yang sama, maka mestilah $f = g$.
2. Gunakan deret Fourier pada Contoh 2 yang dibahas pada Bab 2 dan Teorema Kekonvergenan Titik demi Titik untuk membuktikan kesamaan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

dengan meninjau nilai deret Fourier dan fungsi tersebut di $\theta = 0$.

3. Buktikan bahwa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

dengan menggunakan deret Fourier dari fungsi tertentu.

4. Deret Fourier pada Interval Sembarang dan Aplikasinya

Kita telah mempelajari bagaimana menguraikan fungsi periodik dengan periode 2π yang terdefinisi pada \mathbf{R} sebagai deret Fourier. Deret trigonometri tersebut sebetulnya dapat pula dipakai sebagai representasi fungsi yang terdefinisi pada interval sembarang yang panjangnya 2π . Pada bab ini kita akan membahas deret Fourier dari suatu fungsi yang didefinisikan pada interval sembarang dan aplikasinya.

4.1 Deret Fourier pada interval sembarang

Misalkan kita mempunyai sebuah fungsi f yang terdefinisi pada $[-\pi, \pi]$, dengan asumsi $f(-\pi) = f(\pi)$. (Asumsi ini dapat dipenuhi dengan cara mendefinisikan ulang nilai f , bila diperlukan, di salah satu titik ujungnya. Asumsi tersebut dapat pula dihapuskan dengan menganggap f terdefinisi hanya pada $(-\pi, \pi]$.) Selanjutnya misalkan f terbatas dan terintegralkan pada $[-\pi, \pi]$. Kita perluas f pada \mathbf{R} sedemikian sehingga f periodik dengan periode 2π , melalui

$$f(\theta + 2n\pi) = f(\theta) \quad \forall \theta \in (-\pi, \pi], \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Sebagai contoh, fungsi periodik f yang dibahas pada Bab 2, Contoh 1, dapat dipandang sebagai perluasan periodik fungsi $f(\theta) = |\theta|$ dari interval $(-\pi, \pi]$ ke seluruh \mathbf{R} .

Jika f mulus bagian demi bagian pada $(-\pi, \pi]$, maka kita dapat menguraikannya sebagai deret Fourier. Dengan membatasi kembali peubah θ pada $[-\pi, \pi]$, kita peroleh deret Fourier dari fungsi semula. Sekarang misalkan f terdefinisi hanya pada $[0, \pi]$. Kita dapat memperluas f pada \mathbf{R} sedemikian sehingga ia merupakan fungsi periodik dengan periode 2π , dan kemudian kita peroleh deret Fouriernya.

Untuk memperluas f pada \mathbf{R} , pertama kita perluas f pada $[-\pi, \pi]$. Ada dua cara yang baku untuk hal ini, yakni dengan membuatnya menjadi fungsi genap atau ganjil.

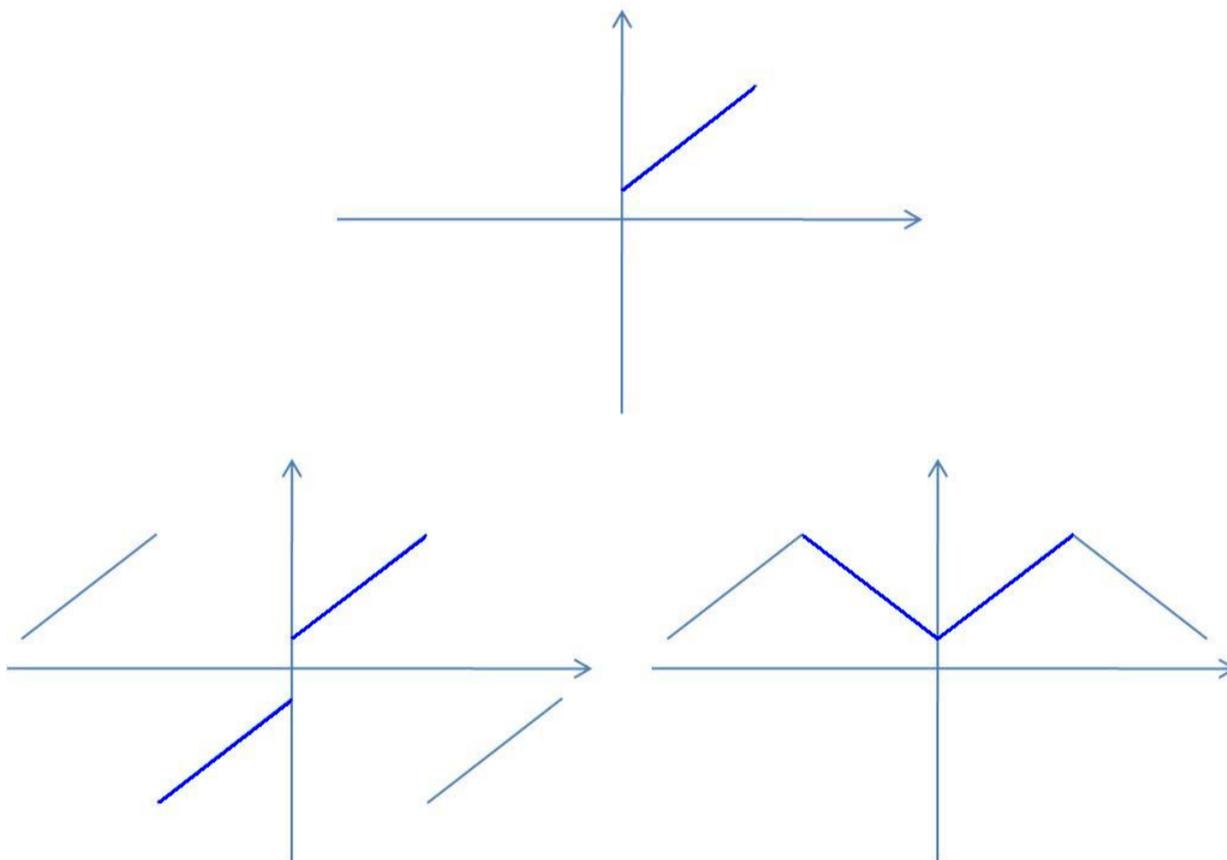
Perluasan genap f_{genap} pada $[-\pi, \pi]$ dapat diperoleh melalui

$$f_{\text{genap}}(-\theta) = f(\theta) \quad \forall \theta \in [0, \pi];$$

sementara perluasan ganjil f_{ganjil} dapat diperoleh melalui

$$f_{\text{ganjil}}(-\theta) = -f(\theta) \quad \forall \theta \in (0, \pi], \quad f_{\text{ganjil}}(0) = 0;$$

Untuk ilustrasi, lihat gambar berikut.



Gambar 4.1: Fungsi beserta perluasan ganjil dan perluasan genap

Keuntungan menggunakan f_{genap} dan f_{ganjil} adalah bahwa deret Fouriernya kelak lebih sederhana. Untuk f_{genap} , koefisien sinusnya akan sama dengan nol (karena $\sin n\theta$ merupakan fungsi ganjil). Untuk f_{ganjil} , koefisien cosinusnya akan sama dengan nol (karena $\cos n\theta$ merupakan fungsi genap). Jadi, deret Fourier dari f_{genap} hanya melibatkan fungsi cosinus, sementara deret Fourier dari f_{ganjil} hanya melibatkan fungsi

sinus. Dengan simetri, perhitungan koefisien lainnya juga menjadi lebih mudah:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_{\text{genap}}(\theta) \cos n\theta \, d\theta = 2 \int_0^{\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_{\text{ganjil}}(\theta) \sin n\theta \, d\theta = 2 \int_0^{\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta.$$

Perhatikan bahwa pada akhirnya fungsi f yang semula terdefinisi pada $[0, \pi]$ muncul kembali dalam perhitungan koefisien Fourier di atas.

Selanjutnya, misalkan f terintegralkan pada $[0, \pi]$. Deret

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta, \quad \text{dengan } a_n := \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta,$$

disebut *deret Fourier cosinus* dari f .

Sementara itu, deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta, \quad \text{dengan } b_n := \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta,$$

disebut *deret Fourier sinus* dari f .

Teorema A. Misalkan f mulus bagian demi bagian pada $[0, \pi]$. Maka, deret Fourier cosinus dan deret Fourier sinus dari f konvergen ke $\frac{1}{2}[f(\theta-) + f(\theta+)]$ di setiap $\theta \in (0, \pi)$. Khususnya, mereka konvergen ke $f(\theta)$ jika f kontinu di $\theta \in (0, \pi)$. Deret Fourier cosinus dari f konvergen ke $f(0+)$ di $\theta = 0$ dan ke $f(\pi-)$ di $\theta = \pi$; deret Fourier sinus dari f konvergen ke 0 di kedua titik tersebut.

Sekarang misalkan $f(x)$ adalah fungsi periodik dengan periode $2L$. Dengan substitusi peubah $x := \frac{L\theta}{\pi}$, kita peroleh fungsi baru

$$g(\theta) := f\left(\frac{L\theta}{\pi}\right) = f(x).$$

Perhatikan bahwa g merupakan fungsi periodik dengan periode 2π , dan jika f mulus bagian demi bagian maka g juga. Dalam hal itu, g dapat diuraikan sebagai deret Fourier

$$g(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}, \quad \text{dengan } c_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) e^{-in\theta} \, d\theta,$$

Jika kita substitusikan kembali $\theta = \frac{\pi x}{L}$ ke dalam rumus di atas, maka kita dapatkan deret Fourier periodik dengan periode $2L$ dari fungsi f semula:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}, \quad \text{dengan } c_n := \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx.$$

Dinyatakan dalam cosinus dan sinus, deret ini menjadi

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right],$$

dengan

$$a_n := \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad b_n := \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Dengan cara yang serupa seperti sebelumnya kita dapat memperoleh deret Fourier cosinus dan deret Fourier sinus dari fungsi f yang mulus bagian demi bagian pada $[0, L]$, yakni

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad \text{dengan } a_n := \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx,$$

dan

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad \text{dengan } b_n := \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Contoh 1. Deret Fourier cosinus dari fungsi $f(x) := x$, $x \in [0, 1]$, adalah

$$\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)\pi x;$$

sementara deret Fourier sinusnya adalah

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi x.$$

4.2 Contoh aplikasi

Pada Bab 1 kita telah membahas persamaan panas untuk sepotong kawat lurus yang panjangnya L , yakni

$$u_u = ku_{xx}$$

dengan syarat batas

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

dan syarat awal

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L.$$

Kandidat solusi masalah ini adalah

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 \pi^2 kt/L^2} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0,$$

dengan koefisien b_n memenuhi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 \leq x \leq L.$$

Sekarang kita telah mengetahui bahwa persamaan terakhir di atas dapat dipenuhi apabila f mulus bagian demi bagian pada $[0, L]$ dan

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Pertanyaannya kemudian adalah: apakah $u(x, t)$ yang diberikan sebagai deret oleh rumus di atas, dengan koefisien b_n ini, sungguh merupakan solusi masalah tadi? Jawabannya *ya*. Penjelasannya adalah sebagai berikut: Masing-masing suku deret merupakan solusi persamaan panas. Pada daerah $0 \leq x \leq L$, $t \geq \epsilon > 0$, deret konvergen mutlak dan seragam. Karena itu, penurunan suku demi suku dapat dilakukan untuk menunjukkan bahwa $u(x, t)$ merupakan solusi persamaan panas. Syarat batas $u(0, t) = u(L, t) = 0$ dan $u(x, 0) = f(x)$ mudah diperiksa. Lebih jauh, jika f mulus bagian demi bagian dan kontinu pada $[0, L]$, maka dengan uji M -Weierstrass dapat ditunjukkan bahwa deret tersebut konvergen seragam pada daerah $0 \leq x \leq L$, $t \geq 0$, dan karenanya u kontinu pada daerah ini, sehingga $u(x, t) \rightarrow u(x, 0) = f(x)$ bila $t \rightarrow 0^+$.

Pertanyaan berikutnya adalah: apakah solusi masalah tersebut tunggal? Jawabannya juga *ya*. Setiap solusi $u(x, t)$ untuk masalah tersebut mestilah dapat diuraikan sebagai deret Fourier dalam x untuk setiap t . Substitusikan deret ini ke dalam persamaan dan gunakan syarat awal, kita akan sampai pada kesimpulan bahwa koefisien deret ini mestilah sama dengan koefisien Fourier yang kita peroleh sebelumnya.

4.3 Soal Latihan

1. Verifikasi deret Fourier cosinus dan deret Fourier sinus dari fungsi f pada Contoh 1.
2. Bagaimana anda dapat memperoleh deret Fourier dari sebuah fungsi yang terdefinisi pada sebarang interval $[a, b]$? Jelaskan secara detil.
3. Verifikasi ketunggalan solusi persamaan panas dengan syarat batas dan syarat awal yang dibahas pada §4.2.
4. Tentukan solusi *tak homogen* dari persamaan diferensial biasa orde 2 berikut:

$$y'' + 0,02y' + 25y = r(t)$$

dengan $r(t) := |t| - \frac{1}{2}$ untuk $-1 < t \leq 1$ dan $r(t+2) = r(t)$ untuk setiap $t \in \mathbf{R}$.
(Petunjuk: Nyatakan $r(t)$ sebagai deret Fourier terlebih dahulu.)

5. Beberapa Catatan Mengenai Deret Fourier

Kita telah mempelajari deret Fourier dan aplikasinya, tetapi itu sebetulnya baru sebagian saja. Berikut adalah beberapa informasi tambahan mengenai deret Fourier yang mungkin perlu diketahui oleh Anda.

5.1 Turunan dan Integral dari Deret Fourier

Teorema A (Turunan dari deret Fourier). Misalkan f periodik dengan periode 2π , kontinu, dan mulus bagian demi bagian. Misalkan a_n , b_n , dan c_n adalah koefisien Fourier dari f (real dan kompleks). Misalkan a'_n , b'_n , dan c'_n menyatakan koefisien Fourier dari f' . Maka, untuk setiap n , berlaku

$$a'_n = nb_n, \quad b'_n = -na_n, \quad \text{dan} \quad c'_n = inc_n.$$

Teorema B (Integral dari deret Fourier). Misalkan f periodik dengan periode 2π , dan a_n , b_n , dan c_n adalah koefisien Fourier dari f . Misalkan $F(\theta) = \int_0^\theta f(\phi)d\phi$, anti-turunan dari f . Jika $c_0 (= \frac{1}{2}a_0) = 0$, maka untuk setiap θ berlaku

$$F(\theta) = C_0 + \sum_{n \neq 0} \frac{c_n}{in} e^{in\theta} = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} \sin n\theta - \frac{b_n}{n} \cos n\theta \right),$$

dengan suku konstanta C_0 sama dengan nilai rata-rata F pada $[-\pi, \pi]$, yakni

$$C_0 = \frac{1}{2}A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\theta)d\theta.$$

Catatan. Pada Bab 3, kita membahas kekonvergenan deret Fourier, khususnya kekonvergenan titik demi titik. Kekonvergenan seragam deret Fourier diperoleh bila f periodik dengan periode 2π , kontinu, dan mulus bagian demi bagian pada \mathbf{R} . Pembuktian dalil ini sesungguhnya memerlukan Teorema A yang berkaitan dengan turunan dari deret Fourier. Bila penasaran, lihat buku Folland (Wadsworth, 1992), hal. 41.

5.2 Deret Fourier sebagai transformasi

Diberikan sebuah fungsi periodik f dengan periode $2L$, koefisien Fourier c_n dari f dapat dipandang sebagai suatu pemetaan

$$n \mapsto c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx,$$

yang terdefinisi pada \mathbf{Z} . Transformasi $f \mapsto (c_n)$ memetakan fungsi periodik f yang terdefinisi pada \mathbf{R} ke barisan (c_n) yang terdefinisi pada \mathbf{Z} .

Transformasi ini memetakan fungsi dengan domain waktu ke fungsi dengan domain frekuensi. Secara fisis, c_n menyimpan informasi tentang sinyal f yang mempunyai frekuensi $|\frac{n\pi}{L}|$. Catat bahwa semakin besar L , semakin kerap domain frekuensi $\{|\frac{n\pi}{L}| : n \in \mathbf{Z}\}$.

Invers dari transformasi tersebut memetakan barisan $(\phi(n))$ dengan indeks bilangan bulat ke fungsi periodik $g(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(n) e^{in\pi x/L}$ yang terdefinisi pada \mathbf{R} . Rumus ini memberi kita cara untuk merekonstruksi f dari barisan (c_n) : $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}$.

Pada prinsipnya, informasi tentang f tersimpan dalam (c_n) , dan sebaliknya. Namun, terdapat beberapa keuntungan bila kita bekerja dengan (c_n) dibandingkan dengan f . Sebagai contoh, Teorema A pada §5.1 menunjukkan bahwa transformasi di atas ‘mengubah’ operasi penurunan (pada f) menjadi perkalian dengan $\frac{in\pi}{L}$ (pada (c_n)): jika c'_n menyatakan koefisien Fourier dari f' , maka $c'_n = \frac{in\pi}{L} c_n$.

5.3 Perbandingan dengan deret Taylor

Kita masih ingat bagaimana menguraikan sebuah fungsi f sebagai deret Taylor di sekitar suatu titik x_0 dalam daerah definisinya:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad |x - x_0| < r,$$

asalkan f dapat diturunkan tak hingga kali di x_0 , dan suku sisa Taylor-nya menuju 0 pada interval tersebut. Kecepatan kekonvergen deret Taylor di x bergantung pada seberapa jauh x dari x_0 . Secara umum, jumlah parsial dari deret Taylor dapat memberikan hampiran yang sangat baik di dekat x_0 tetapi tidak terlalu baik untuk x yang jauh dari x_0 .

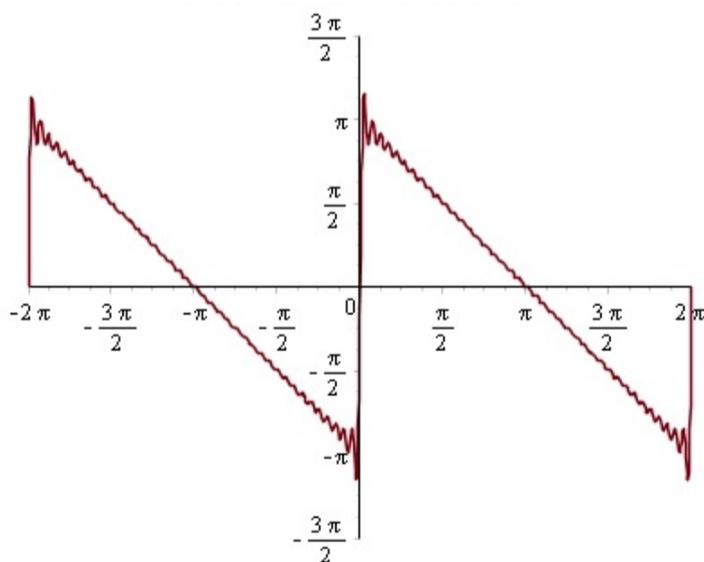
Berbeda dengan deret Taylor, deret Fourier untuk fungsi f yang periodik dengan periode $2L$ tidak mengharuskan f mempunyai turunan tiap orde. Bila f cukup mulus pada $[-L, L]$, jumlah parsial dari deret Fourier akan konvergen ke f cukup cepat dan secara seragam, serta memberikan hampiran yang baik pada $[-L, L]$.

Jadi, bila deret Taylor terkait erat dengan perilaku lokal fungsi, maka deret Fourier terkait erat dengan perilaku global fungsi.

5.4 Fenomena Gibbs

Misalkan f adalah sebuah fungsi periodik. Jika f mempunyai diskontinuitas di x_0 , maka deret Fourier dari f tidak mungkin konvergen ke f secara seragam pada interval yang mengandung x_0 (karena limit seragam dari barisan fungsi kontinu haruslah kontinu). Untuk fungsi f yang mulus bagian demi bagian, deret Fourier dari f mengalami suatu fenomena yang dikenal sebagai *fenomena Gibbs*, khususnya di titik-titik diskontinuitas fungsi f . Jumlah parsialnya dalam hal ini akan ‘overshoot’ dan ‘undershoot’ f di dekat titik diskontinuitasnya.

Sebagai ilustrasi, tinjau $f(\theta) := \pi - \theta$, untuk $0 < \theta < 2\pi$, $f(\theta + 2n\pi) = f(\theta)$ untuk setiap $n \in \mathbf{Z}$. Maka, deret Fourier dari f akan tampak seperti pada gambar di bawah ini. Perhatikan bahwa ada semacam *spike* di dekat titik-titik diskontinuitas f .



Gambar 5.4: Fenomena Gibbs

Untuk mengetahui berapa besar ‘overshoot’ dan ‘undershoot’ tersebut, kerjakan soal latihan di bawah ini (yang dicuplik dari buku G.B. Folland “*Fourier Analysis and Its Applications*” (Wadsworth, 1992).

5.5 Teorema Fejér

Fenomena Gibbs dapat diatasi dengan menggunakan rata-rata dari N jumlah parsial pertama sebagai hampiran, menggantikan jumlah parsial ke- N . Persisnya, misalkan f fungsi kontinu pada \mathbf{R} dan periodik dengan periode 2π , dan S_N^f menyatakan jumlah parsial simetris ke- N dari deret Fourier f .

Teorema C (Fejer). Misalkan $\sigma_N^f := \frac{1}{N+1}(S_0^f + S_1^f + \cdots + S_N^f)$. Maka $\sigma_N^f \rightarrow f$ secara seragam pada \mathbf{R} untuk $N \rightarrow \infty$.

Terkait dengan σ_N^f , kita mempunyai *kernel Fejér* $K_N(\theta) := \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N D_k(\theta) = \frac{1}{2\pi(N+1)} \sum_{k=0}^N \frac{\sin(k+1/2)\theta}{\sin \theta/2}$. Dengan mengalikan pembilang dan penyebut pada $K_N(\theta)$ dengan $\sin \theta/2$, kita peroleh

$$K_N(\theta) = \frac{1}{2\pi(N+1)} \left[\frac{\sin(N+1/2)\theta}{\sin \theta/2} \right]^2.$$

Dapat diperiksa bahwa kernel Fejér memenuhi tiga sifat dasar di bawah ini:

- (a) $K_N(\theta) \geq 0$ untuk setiap $N \in \mathbf{N}$ dan $\theta \in [-\pi, \pi]$;
- (b) $\int_{-\pi}^{\pi} K_N(\theta) d\theta = 1$ untuk setiap $N \in \mathbf{N}$;
- (c) $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} K_N(\theta) d\theta = 0$ untuk setiap $\delta \in (0, \pi)$.

5.6 Soal latihan

1. Diketahui $f(\theta) := \pi - \theta$, untuk $0 < \theta < 2\pi$, $f(\theta + 2n\pi) = f(\theta)$ untuk setiap $n \in \mathbf{Z}$.
 - (a) Tunjukkan bahwa $f(\theta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$ untuk $0 < \theta < 2\pi$.
 - (b) Misalkan $g_N(\theta) := 2 \sum_{n=1}^N \frac{\sin n\theta}{n} - (\pi - \theta)$. Tunjukkan bahwa $g'_N(\theta) = 2\pi D_N(\theta)$, dengan D_N adalah kernel Dirichlet pada §3.
 - (c) Tunjukkan bahwa titik stasioner pertama di sebelah kanan 0 dari $g_N(\theta)$ tercapai di $\theta_N := \frac{\pi}{N+1/2}$, dan

$$g_N(\theta_N) = \int_0^{\theta_N} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})\theta}{\sin \frac{1}{2}\theta} d\theta - \pi.$$

- (d) Tunjukkan bahwa $\lim_{N \rightarrow \infty} g_N(\theta_N) = 2 \int_0^{\pi} \frac{\sin \phi}{\phi} d\phi - \pi$.

2. Buktikan ketiga sifat kernel Fejér pada §5.5.

6. Himpunan Fungsi Ortogonal

Misalkan f periodik dengan periode 2π , dan mulus bagian demi bagian pada $[-\pi, \pi]$. Jika $S_N^f(\theta) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\theta}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, adalah jumlah parsial dari deret Fourier f , maka kita telah menunjukkan bahwa (S_N^f) konvergen ke f , yakni

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\theta} = f(\theta)$$

hampir di mana-mana. Dalam hal ini kita dapat merekonstruksi f dari koefisien-koefisien Fourier-nya melalui

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}.$$

Namun, secara umum, deret Fourier f tidak selalu sama persis dengan fungsi f semula. Bahkan, dalam kasus ekstrim, deret Fourier f dapat divergen di mana-mana, sebagaimana ditunjukkan oleh Kolmogorov (1926).

Fungsi yang mulus bagian demi bagian pada $[-\pi, \pi]$ tentunya terintegralkan pada $[-\pi, \pi]$. Keterintegralan f pada $[-\pi, \pi]$ merupakan premis yang diasumsikan pada awal pembahasan deret Fourier. Tetapi, apakah deret Fourier f akan konvergen ke f bila kita hanya mengasumsikan f terintegralkan pada $[-\pi, \pi]$?

6.1 Himpunan fungsi ortogonal

Dalam penghitungan koefisien Fourier, ada fakta penting mengenai fungsi-fungsi e^{inx} ($n \in \mathbf{Z}$), yaitu ke-ortogonalan-nya. Ya, deret Fourier dibentuk dari keluarga fungsi ortogonal ini, di suatu ruang fungsi yang dilengkapi dengan hasil kali dalam tertentu.

Di ruang vektor X yang dilengkapi dengan hasil kali dalam $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dan norma $\| \cdot \|$, vektor $u \in X$ disebut *vektor normal* jika $\|u\| = 1$. Vektor $v \neq 0$ dapat dinormalkan dengan membaginya dengan $\|v\|$: jika $u := \frac{v}{\|v\|}$, maka $\|u\| = 1$. Himpunan vektor

$\{u_1, \dots, u_n\}$ disebut *himpunan ortonormal* jika $\|u_i\| = 1$ untuk tiap $i = 1, \dots, n$ dan $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ untuk $i \neq j$; yakni jika

$$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

[Jika $v_i \neq 0$ untuk tiap $i = 1, \dots, n$ dan $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ untuk $i \neq j$, maka $\{v_1, \dots, v_n\}$ disebut *himpunan ortogonal*.]

Jika $\{u_1, \dots, u_k\}$ ortonormal di \mathbf{C}^k dan $v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k$, maka $\alpha_i = \langle v, u_i \rangle$ untuk tiap $i = 1, \dots, k$. Sebaliknya, misalkan $v \in \mathbf{C}^k$. Jika kita definisikan $\alpha_i = \langle v, u_i \rangle$ untuk $i = 1, \dots, k$ dan tulis $\bar{v} = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k$, maka $w = v - \bar{v} \perp u_i$, karena

$$\langle w, u_i \rangle = \langle v, u_i \rangle - \langle \bar{v}, u_i \rangle = 0,$$

untuk tiap $i = 1, \dots, k$. Akibatnya $w = 0$, karena bila tidak, maka $\{u_1, \dots, u_k, w\}$ merupakan himpunan ortogonal dengan $k + 1$ anggota di \mathbf{C}^k .

Teorema A. Misalkan $\{u_1, \dots, u_k\}$ himpunan ortonormal k vektor di \mathbf{C}^k . Maka, untuk setiap $v \in \mathbf{C}^k$, berlaku

- (a) $v = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle v, u_k \rangle u_k$.
- (b) $\|v\|^2 = |\langle v, u_1 \rangle|^2 + \dots + |\langle v, u_k \rangle|^2$.

6.2 Ruang $PC(a, b)$ sebagai ruang hasilkali dalam

Mari kita tinjau ruang $PC(a, b)$, yaitu ruang fungsi kontinu bagian demi bagian pada $[a, b]$. Ingat bahwa f dikatakan kontinu bagian demi bagian pada $[a, b]$ apabila f kontinu pada $[a, b]$ kecuali di sejumlah terhingga titik x_1, \dots, x_k , dan di titik-titik tersebut limit kiri dan limit kanan f ada. Fungsi f di $PC(a, b)$ tidak hanya terintegralkan tetapi juga kuadratnya terintegralkan, yakni $|f|^2$ terintegralkan, pada (a, b) . Pada $PC(a, b)$ kita dapat mendefinisikan *hasilkali dalam*

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

dan *norma*

$$\|f\| := \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{1/2}.$$

Ketaksamaan Cauchy-Schwarz, Ketaksamaan Segitiga, dan Hukum Pythagoras berlaku di $PC(a, b)$ yang dilengkapi dengan $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dan $\| \cdot \|$ di atas.

Teorema B (Hukum Pythagoras). *Jika $\{f_1, \dots, f_n\}$ ortogonal, maka*

$$\|f_1 + \dots + f_n\|^2 = \|f_1\|^2 + \dots + \|f_n\|^2.$$

Diberikan suatu himpunan ortonormal $\{\phi_n : n \in I\}$ di $PC(a, b)$ dan $f \in PC(a, b)$ sembarang, kita ingin tahu apakah $f = \sum_{n \in I} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$. Mengingat bahwa $PC(a, b)$ berdimensi tak terhingga, pertanyaan ini tidak dapat segera kita jawab. Jika $\{\phi_n : n \in I\}$ terhingga, jelas hal tersebut tidak mungkin terjadi. Jika $\{\phi_n : n \in I\}$ tak terhingga, apakah terdapat cukup banyak ϕ_n untuk merentang $PC(a, b)$?

Sebelum menjawab pertanyaan ini secara rinci, mari kita tinjau keluarga fungsi

$$\phi_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad n \in \mathbf{Z},$$

di ruang $PC(-\pi, \pi)$. Perhatikan bahwa untuk setiap $m, n \in \mathbf{Z}$ berlaku

$$\langle \phi_m, \phi_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} \overline{e^{inx}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} dx = \delta_{mn}.$$

Jadi $\{\phi_n : n \in \mathbf{Z}\}$ merupakan himpunan ortonormal.

Selanjutnya, koefisien Fourier c_n dari $f \in PC(-\pi, \pi)$ diberikan oleh rumus

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle f, \phi_n \rangle, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Jadi,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle f, \phi_n \rangle \cdot \sqrt{2\pi} \phi_n(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x).$$

Jadi deret Fourier f merupakan uraian terhadap himpunan ortonormal $\{\phi_n : n \in \mathbf{Z}\}$.

Demikian pula kita dapat memeriksa bahwa keluarga fungsi $\{\psi_n : n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$ dengan

$$\psi_0(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \psi_n(x) := \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

merupakan keluarga fungsi ortonormal di $PC(0, \pi)$. Selanjutnya, koefisien cosinus Fourier a_n dari $f \in PC(0, \pi)$ yang diberikan oleh rumus

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \langle f, \psi_0 \rangle, & \text{untuk } n = 0, \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \langle f, \psi_n \rangle, & \text{untuk } n = 1, 2, 3, \dots, \end{cases}$$

memenuhi

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \psi_n \rangle \psi_n(x).$$

Hal serupa terjadi untuk deret sinus Fourier dan deret Fourier lengkap (versi real).

Kita sudah tahu bahwa deret Fourier ini konvergen ke f hampir di mana-mana apabila f mulus bagian demi bagian pada $[-\pi, \pi]$. Pertanyaannya adalah: bagaimana bila $f \in PC(-\pi, \pi)$?

6.3 Kekonvergenan di ruang $PC(a, b)$

Barisan fungsi (f_n) di $PC(a, b)$ dikatakan *konvergen dalam norma* ke $f \in PC(a, b)$ apabila $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ untuk $n \rightarrow \infty$, yakni jika

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx \rightarrow 0, \quad \text{untuk } n \rightarrow \infty.$$

Perlu dicatat bahwa kekonvergenan dalam norma tidak menjamin kekonvergenan titik demi titik. Sebagai contoh, ambil

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{jika } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{jika } x \text{ lainnya.} \end{cases}$$

Di sini $\|f_n\|^2 = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ bila $n \rightarrow \infty$. Jadi (f_n) konvergen ke $f \equiv 0$ dalam norma. Tetapi $f_n(0) = 1$ untuk tiap $n \in \mathbf{N}$, sehingga (f_n) tidak konvergen ke 0 titik demi titik.

Sebaliknya, misalkan

$$g_n(x) = \begin{cases} n, & \text{jika } 0 < x < \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{jika } x \text{ lainnya.} \end{cases}$$

Maka, $g_n \rightarrow 0$ titik demi titik, tetapi

$$\|g_n\|^2 = \int_0^1 |g_n(x)|^2 dx = \int_0^{1/n} n^2 dx = n \not\rightarrow 0$$

bila $n \rightarrow \infty$.

Teorema C. *Jika $f_n \rightarrow f$ secara seragam pada $[a, b]$, maka $f_n \rightarrow f$ dalam norma.*

Bukti. Diberikan $\epsilon > 0$ sembarang, kita pilih $n_0 \in \mathbf{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in [a, b]$ dan $n \geq n_0$ berlaku $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{\sqrt{b-a}}$. Akibatnya,

$$\|f_n - f\|^2 = \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx \leq \epsilon^2.$$

Ini menunjukkan bahwa $\{f_n\}$ konvergen ke f dalam norma. [QED]

Di satu sisi, dengan adanya hasil kali dalam $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dan norma $\|\cdot\| = \langle \cdot, \cdot \rangle^{1/2}$, ruang $PC(a, b)$ sekarang lebih terstruktur (secara geometri). Di sisi lain, ruang ini menjadi ‘tidak lengkap’, yakni: terdapat barisan Cauchy (f_n) di $PC(a, b)$ yang tidak konvergen ke suatu fungsi $f \in PC(a, b)$. Sebagai contoh, tinjau $PC(0, 1)$ dan ambil barisan (f_n) dengan

$$f_n(x) = \begin{cases} x^{-1/4}, & \text{jika } x > \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{jika } x \leq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Jika $m > n$, maka

$$f_m(x) - f_n(x) = \begin{cases} x^{-1/4}, & \text{jika } \frac{1}{m} < x < \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{jika } x \text{ lainnya} \end{cases},$$

sehingga

$$\|f_m - f_n\|^2 = \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} x^{-1/2} dx = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{m}} \right) \rightarrow 0,$$

bila $m, n \rightarrow \infty$. Jadi (f_n) merupakan barisan Cauchy; tetapi limitnya (baik titik demi titik maupun dalam norma) adalah fungsi

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1/4}, & \text{jika } x > 0, \\ 0, & \text{jika } x = 0, \end{cases}$$

yang bukan anggota $PC(0, 1)$ karena $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$.

Lalu apa yang harus dilakukan? Sebagaimana lazimnya di ruang topologi, yang harus dilakukan adalah ‘melengkapi’ ruang $PC(a, b)$, dengan menambahkan limit-limit dari semua barisan Cauchy pada $PC(a, b)$. Hasilnya adalah ruang $L^2(a, b)$ yang akan dibahas pada bab selanjutnya.

6.4 Soal latihan

1. Buktikan Teorema A bagian (b).
2. Buktikan Teorema B.
3. Buktikan bahwa keluarga fungsi $\{\psi_n : n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$ dengan

$$\psi_0(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{ dan } \psi_n(x) := \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

merupakan himpunan ortonormal di $PC(0, \pi)$, dan koefisien cosinus Fourier

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx \, dx = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \langle f, \psi_0 \rangle, & \text{untuk } n = 0, \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \langle f, \psi_n \rangle, & \text{untuk } n = 1, 2, 3, \dots, \end{cases}$$

memenuhi

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \psi_n \rangle \psi_n(x).$$

4. Buktikan bahwa keluarga fungsi $\{\phi_n : n \in \mathbf{N}\}$ dengan

$$\phi_n(x) := \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \quad n \in \mathbf{N},$$

merupakan himpunan ortonormal di $PC(0, \pi)$, dan koefisien sinus Fourier

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \langle f, \phi_n \rangle,$$

memenuhi

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x).$$

7. Ruang $L^2(a, b)$

Ruang $L^2(a, b)$ didefinisikan sebagai ruang semua fungsi f yang kuadratnya terintegralkan pada $[a, b]$, yakni

$$L^2(a, b) := \left\{ f : \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

Ruang ini mencakup fungsi-fungsi f yang tak terbatas pada $[a, b]$ tetapi $|f|^2$ terintegralkan, termasuk dalam pengertian integral tak wajar menurut Riemann. Sebagai contoh, fungsi

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1/4}, & \text{jika } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{jika } x = 0, \end{cases}$$

merupakan anggota $L^2(0, 1)$.

7.1 Topologi di $L^2(a, b)$

Di ruang $L^2(a, b)$, hasil kali dalam $\langle \cdot, \cdot \rangle$ yang didefinisikan sebagai

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

terdefinisi dengan baik, mengingat

$$|f(x) \overline{g(x)}| \leq \frac{1}{2} (|f(x)|^2 + |g(x)|^2).$$

Seperti halnya di $PC(a, b)$, norma $\| \cdot \|$ pada $L^2(a, b)$ yang didefinisikan sebagai

$$\|f\| := \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

mempunyai sedikit masalah, yaitu $\|f\| = 0$ tidak mengakibatkan $f = 0$ tetapi $f = 0$ hampir di mana-mana. Untuk mengatasi masalah ini, dua fungsi di $L^2(a, b)$ dianggap sama bila mereka bernilai sama hampir di mana-mana. Dengan kata lain, anggota

$L^2(a, b)$ sekarang adalah kelas-kelas ekuivalen fungsi. Namun, dalam prakteknya, kita sering mengaburkan kelas ekuivalen dan fungsi yang mewakili kelas ekuivalen tersebut.

Teorema berikut akan menjadi rujukan kita ke depan.

Teorema A. (a) $L^2(a, b)$ lengkap terhadap kekonvergenan dalam norma.

(b) Untuk setiap $f \in L^2(a, b)$ terdapat barisan fungsi kontinu pada $[a, b]$, sebutlah (f_n) , sedemikian sehingga $f_n \rightarrow f$ dalam norma.

Catatan. Bagian (a) memberi tahu kita bahwa $L^2(a, b)$ merupakan ruang Hilbert. Bagian (b) menyatakan bahwa himpunan fungsi kontinu pada $[a, b]$ ‘padat’ di $L^2(a, b)$. Sebagaimana telah disinggung pada bab sebelumnya, ruang $L^2(a, b)$ dapat dipandang sebagai ‘lengkapan’ dari ruang fungsi $C(a, b)$ yang beranggotakan semua fungsi f yang kontinu pada $[a, b]$. Terhadap norma $\|f\| = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$, ruang fungsi $C(a, b)$ tidak lengkap. Bila kita tambahkan semua limitnya, maka kita peroleh ruang $L^2(a, b)$. Lebih jauh, setiap fungsi $f \in L^2(a, b)$ dapat dihampiri oleh fungsi f_n yang merupakan pembatasan pada $[a, b]$ dari fungsi f_n^* yang terdefinisi pada \mathbf{R} dan mempunyai turunan setiap orde di setiap titik. Fungsi f_n^* bisa merupakan fungsi periodik dengan periode $b - a$ ataupun mempunyai tumpuan kompak.

Berikut adalah bukti Teorema A bagian (a) saja. [Bukti bagian (b) di luar jangkauan, jadi tidak diberikan di sini.]

Bukti. (a) Misalkan (f_n) barisan Cauchy di $L^2(a, b)$, yakni $\|f_m - f_n\| \rightarrow 0$, $m, n \rightarrow \infty$. Pilih subbarisan indeks (n_k) sedemikian sehingga

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| \leq \frac{1}{\sqrt{b-a}} \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Maka, menurut Ketaksamaan Cauchy-Schwarz, kita mempunyai

$$\int_a^b |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| dx \leq \|1\| \cdot \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k,$$

untuk setiap $k \in \mathbf{N}$. Dengan demikian,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1.$$

Menurut Lemma Fatou (lihat misalnya H.L. Royden "Real Analysis"), $\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$, dan karenanya juga $|f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$, konvergen hampir untuk setiap titik $x \in [a, b]$. Akibatnya,

$$f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$$

konvergen ke suatu fungsi $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}$ hampir untuk setiap titik $x \in [a, b]$. Jadi, (f_n) mempunyai subbarisan yang konvergen.

Selanjutnya akan kita tunjukkan bahwa fungsi f di atas merupakan anggota $L^2(a, b)$ dan bahwa $\|f_n - f\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Ambil $\epsilon > 0$ sebarang. Maka, kita dapat memilih k dan l cukup besar sedemikian sehingga $\int_a^b (f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x))^2 dx < \epsilon$. Dengan mengambil $l \rightarrow \infty$, kita peroleh

$$\int_a^b (f_{n_k}(x) - f(x))^2 dx \leq \epsilon.$$

Jadi mestilah $f \in L^2(a, b)$ dan $f_{n_k} \rightarrow f$ ($k \rightarrow \infty$). Namun kekonvergenan subbarisan dari suatu barisan Cauchy mengakibatkan barisan itu sendiri konvergen ke limit yang sama. Ini mengakhiri pembuktian. [QED]

7.2 Ketaksamaan Bessel

Teorema B (Ketaksamaan Bessel). *Jika $\{\phi_n : n \in \mathbf{N}\}$ adalah himpunan ortonormal di $L^2(a, b)$ dan $f \in L^2(a, b)$, maka*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

Bukti. Perhatikan bahwa untuk setiap $n \in \mathbf{N}$ berlaku

$$\langle f, \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \rangle = \overline{\langle f, \phi_n \rangle} \langle f, \phi_n \rangle = |\langle f, \phi_n \rangle|^2,$$

$$\langle \langle f, \phi_n \rangle \phi_n, f \rangle = \langle f, \phi_n \rangle \overline{\langle f, \phi_n \rangle} = |\langle f, \phi_n \rangle|^2,$$

dan menurut Teorema Pythagoras,

$$\left\| \sum_{n=1}^N \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^N |\langle f, \phi_n \rangle|^2,$$

untuk setiap $N \in \mathbf{N}$. Akibatnya

$$0 \leq \left\| f - \sum_{i=1}^N \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^N |\langle f, \phi_n \rangle|^2,$$

sehingga

$$\sum_{n=1}^N |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \leq \|f\|^2,$$

untuk setiap $N \in \mathbf{N}$. Dengan mengambil $N \rightarrow \infty$, kita dapatkan ketaksamaan yang diinginkan. [QED]

Selanjutnya, diberikan suatu himpunan ortonormal $\{\phi_n : n \in \mathbf{N}\}$ di $L^2(a, b)$, kita tertarik untuk mempelajari deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$$

untuk setiap $f \in L^2(a, b)$. Lemma berikut memberitahu kita bahwa deret ini merupakan deret yang konvergen.

Lemma C. *Jika $f \in L^2(a, b)$ dan $\{\phi_n : n \in \mathbf{N}\}$ ortonormal di $L^2(a, b)$, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$ konvergen dalam norma dan $\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\| \leq \|f\|$.*

Bukti. Menurut Ketaksamaan Bessel, $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \phi_n \rangle|^2$ konvergen. Karena itu, menurut Hukum Pythagoras,

$$\left\| \sum_{n=M}^N \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\|^2 = \sum_{n=M}^N |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \rightarrow 0,$$

bila $M, N \rightarrow \infty$. Jadi jumlah parsial dari $\sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$ membentuk barisan Cauchy di $L^2(a, b)$. Karena $L^2(a, b)$ lengkap, deret ini konvergen dalam norma. Selanjutnya, karena $\|\cdot\|$ kontinu, kita peroleh

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=1}^N \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N |\langle f, \phi_n \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

Selanjutnya tinggal mengambil akar kuadrat dari kedua ruas. [QED]

7.3 Basis ortonormal di $L^2(a, b)$

Setelah mengetahui bahwa $\sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$ konvergen asalkan $\{\phi_n : n \in \mathbf{N}\}$ ortonormal di $L^2(a, b)$, sekarang kita ingin mengetahui dalam kondisi apakah ia konvergen ke f . Di ruang hasilkali dalam berdimensi terhingga, misalnya ruang polinom berorde N , kita tinggal menghitung banyaknya fungsi ϕ_n — bila banyaknya sama dengan dimensi ruang hasilkali dalam tersebut, yaitu $N + 1$, maka jumlah deret di atas akan sama dengan f . Di ruang berdimensi tak terhingga, seperti halnya $L^2(a, b)$, banyaknya fungsi ϕ_n tentunya harus sama dengan tak terhingga. Tetapi apakah banyaknya fungsi tersebut ‘sudah pas’? Teorema berikut memberikan kriteria yang ‘pas’ itu seperti apa.

Teorema D. Misal $\{\phi_n : n \in \mathbf{N}\}$ adalah suatu himpunan ortonormal di $L^2(a, b)$. Ketiga pernyataan berikut ekuivalen:

- (a) Jika $\langle f, \phi_n \rangle = 0$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$, maka $f = 0$.
- (b) Untuk setiap $f \in L^2(a, b)$ berlaku $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$ (dalam norma).
- (c) Untuk setiap $f \in L^2(a, b)$ berlaku $\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \phi_n \rangle|^2$ (Kesamaan Parseval).

Bukti. Akan dibuktikan (a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a). Pertama, misal (a) berlaku. Telah dibuktikan pada lemma sebelumnya bahwa $\sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$ konvergen dalam norma. Untuk menunjukkan bahwa jumlahnya adalah f , kita tinjau $g := f - \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$. Perhatikan bahwa

$$\langle g, \phi_m \rangle = \langle f, \phi_m \rangle - \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \langle \phi_n, \phi_m \rangle = 0,$$

untuk tiap $m \in \mathbf{N}$. Menurut hipotesis, kita peroleh $g = 0$. Jadi $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$.

Sekarang, misalkan (b) berlaku. Menurut Hukum Pythagoras dan fakta bahwa $\|\cdot\|$ merupakan pemetaan yang kontinu,

$$\|f\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=1}^N \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N |\langle f, \phi_n \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \phi_n \rangle|^2.$$

Akhirnya, misalkan (c) berlaku, dan $\langle f, \phi_n \rangle = 0$ untuk tiap $n \in \mathbf{N}$. Maka, $\|f\| = 0$, dan karena itu $f = 0$. [QED]

Selanjutnya, himpunan ortonormal $\{\phi_n : n \in \mathbf{N}\}$ yang memenuhi (a), atau (b), atau (c), pada teorema di atas, disebut *himpunan ortonormal lengkap* atau *ba-*

sis ortonormal untuk $L^2(a, b)$. Bila persyaratan ortonormal diganti dengan ortogonal, maka kita peroleh *basis ortogonal* untuk $L^2(a, b)$.

7.4 Soal Latihan

1. Buktikan bahwa $\|\cdot\|$ merupakan pemetaan yang kontinu, yakni jika $f_n \rightarrow f$ dalam norma, maka $\|f_n\| \rightarrow \|f\|$ (bila $n \rightarrow \infty$).
2. Buktikan bahwa $\langle \cdot, \cdot \rangle$ merupakan pemetaan yang kontinu terhadap masing-masing komponen, khususnya jika $f_n \rightarrow f$ dalam norma, maka $\langle f_n, g \rangle \rightarrow \langle f, g \rangle$ untuk setiap $g \in L^2(a, b)$.
3. Misalkan $\{\phi_n : n \in \mathbf{N}\}$ basis ortonormal untuk $L^2(a, b)$. Buktikan bahwa untuk setiap $f, g \in L^2(a, b)$ berlaku $\langle f, g \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \overline{\langle g, \phi_n \rangle}$.
4. Hitung jumlah deret berikut dengan menerapkan Kesamaan Parseval untuk fungsi f tertentu:
 - (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.
 - (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6}$.

8. Deret Fourier yang Diperumum dan Hampiran Terbaik di $L^2(a, b)$

Pada Bab 6 kita telah melihat bahwa deret Fourier klasik dari f dapat dinyatakan sebagai $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x)$, dengan $\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$, $n \in \mathbf{Z}$. Ini terjadi antara lain karena $\{\phi_n : n \in \mathbf{Z}\}$ merupakan himpunan ortonormal. Di $L^2(-\pi, \pi)$, kekonvergenan deret di atas dalam norma merupakan konsekuensi dari kelengkapan $\{\phi_n : n \in \mathbf{Z}\}$. (Catat bahwa \mathbf{Z} dan \mathbf{N} merupakan dua himpunan yang setara — terdapat korespondensi 1-1 di antara keduanya.)

8.1 Deret Fourier yang diperumum

Jika $\{\phi_n : n \in \mathbf{N}\}$ adalah basis ortonormal untuk $L^2(a, b)$ dan $f \in L^2(a, b)$, maka $\langle f, \phi_n \rangle$ disebut *koefisien Fourier yang diperumum* dari f terhadap $\{\phi_n : n \in \mathbf{N}\}$, dan $\sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$ disebut *deret Fourier yang diperumum* dari f terhadap $\{\phi_n : n \in \mathbf{N}\}$.

Pertanyaan kita adalah: apakah himpunan ortonormal pada pembahasan deret Fourier klasik merupakan basis ortonormal, yakni apakah $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$ untuk setiap $f \in L^2(-\pi, \pi)$? Ingat bahwa kita baru membuktikan ini untuk fungsi di $PS(a, b)$.

Teorema A. (a) Himpunan $\{e^{inx} : n \in \mathbf{Z}\}$ dan $\{\cos nx : n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\} \cup \{\sin nx : n \in \mathbf{N}\}$ merupakan basis ortogonal untuk $L^2(-\pi, \pi)$.

(b) Himpunan $\{\cos nx : n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$ dan $\{\sin nx : n \in \mathbf{N}\}$ merupakan basis ortogonal untuk $L^2(0, \pi)$.

Bukti. Akan dibuktikan (a) bagian pertama saja, yang berkenaan dengan himpunan $\{e^{inx} : n \in \mathbf{Z}\}$. Bagian lainnya dapat dibuktikan secara serupa.

Misalkan $f \in L^2(-\pi, \pi)$ dan $\epsilon > 0$. Berdasarkan Teorema A pada §7.2 (tentang topologi ruang $L^2(a, b)$), terdapat fungsi \tilde{f} yang kontinu dan mulus bagian demi bagian pada $[-\pi, \pi]$ sedemikian sehingga $\|f - \tilde{f}\| < \frac{\epsilon}{3}$. Misalkan $c_n = \frac{1}{2\pi} \langle f, \psi_n \rangle$ dan $\tilde{c}_n =$

$\frac{1}{2\pi}\langle \tilde{f}, \psi_n \rangle$, dengan $\psi_n(x) = e^{inx}$, $n \in \mathbf{Z}$, adalah koefisien Fourier dari f dan \tilde{f} , berturut-turut. Menurut teorema kekonvergenan seragam deret Fourier, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_n \psi_n$ konvergen seragam ke \tilde{f} . Akibatnya, jika N cukup besar, maka

$$\left\| \tilde{f} - \sum_{n=-N}^N \tilde{c}_n \psi_n \right\| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Selanjutnya, menurut Teorema Pythagoras dan Ketaksamaan Bessel,

$$\left\| \sum_{n=-N}^N \tilde{c}_n \psi_n - \sum_{n=-N}^N c_n \psi_n \right\|^2 = \sum_{n=-N}^N 2\pi |\tilde{c}_n - c_n|^2 \leq \|\tilde{f} - f\|^2 < \left(\frac{\epsilon}{3}\right)^2.$$

Jadi, jika kita tulis

$$f - \sum_{n=-N}^N c_n \psi_n = (f - \tilde{f}) + \left(\tilde{f} - \sum_{n=-N}^N \tilde{c}_n \psi_n \right) + \left(\sum_{n=-N}^N \tilde{c}_n \psi_n - \sum_{n=-N}^N c_n \psi_n \right),$$

dan gunakan Ketaksamaan Segitiga, maka kita peroleh

$$\left\| f - \sum_{n=-N}^N c_n \psi_n \right\| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Jadi $f = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n \psi_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \psi_n$ dalam norma, dan ini membuktikan bahwa himpunan fungsi $\{\psi_n : n \in \mathbf{Z}\}$ merupakan basis ortonormal untuk $L^2(-\pi, \pi)$.

[QED]

Sebagai rangkuman, sejauh ini kita telah membahas: jika f periodik, maka deret Fourier dari f akan konvergen ke f

- (i) secara seragam, mutlak, dan dalam norma, untuk f yang kontinu dan mulus bagian demi bagian pada $[a, b]$;
- (ii) secara titik demi titik, untuk f yang mulus bagian demi bagian pada $[a, b]$;
- (iii) dalam norma, untuk $f \in L^2(a, b)$.

Eksistensi basis ortonormal di $L^2(a, b)$ memberi tahu kita bahwa $L^2(a, b)$ merupakan ruang Hilbert yang *terpisahkan*.

8.2 Hampiran terbaik di $L^2(a, b)$

Teorema berikut menyatakan bahwa deret dengan koefisien Fourier untuk f (terhadap suatu himpunan ortonormal di $L^2(a, b)$) merupakan hampiran terbaik untuk f di antara semua uraian deret yang mungkin (terhadap himpunan ortonormal tersebut).

Teorema B. Misalkan $\{\phi_n : n \in I\}$ adalah suatu himpunan fungsi ortonormal, yang terhingga atau terbilang banyaknya, di $L^2(a, b)$. Maka

$$\left\| f - \sum_I \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\| \leq \left\| f - \sum_I c_n \phi_n \right\|$$

untuk sembarang pilihan $\{c_n : n \in I\}$ dengan $\sum_I |c_n|^2 < \infty$. Lebih jauh, kesamaan dipenuhi jika dan hanya jika $c_n = \langle f, \phi_n \rangle$ untuk setiap indeks $n \in I$.

Bukti. Kita tulis

$$f - \sum c_n \phi_n = \left(f - \sum \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right) + \sum [\langle f, \phi_n \rangle - c_n] \phi_n,$$

dengan notasi $\sum = \sum_I$. Perhatikan bahwa $g := f - \sum \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \perp \phi_m$ atau $\langle g, \phi_m \rangle = 0$, untuk setiap m . Jadi, $g \perp \sum [\langle f, \phi_n \rangle - c_n] \phi_n$, sehingga menurut Teorema Pythagoras,

$$\left\| f - \sum c_n \phi_n \right\|^2 = \left\| f - \sum \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\|^2 + \sum |\langle f, \phi_n \rangle - c_n|^2 \geq \left\| f - \sum \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\|^2,$$

dan kesamaan dipenuhi jika dan hanya $c_n = \langle f, \phi_n \rangle$ untuk setiap $n \in I$. [QED]

Contoh 1. Misalkan kita ingin menentukan hampiran terbaik untuk $f(x) := \sin x$ di antara semua kombinasi linear $c_1 + c_2 \cos x$ di $L^2(0, \pi)$. Dalam hal ini, kita mencatat bahwa $\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cos x \right\}$ merupakan himpunan ortonormal di $L^2(0, \pi)$. Sekarang kita hitung

$$\left\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi \sin x \, dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}},$$

dan

$$\left\langle f, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cos x \right\rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi \sin x \cos x \, dx = 0.$$

Jadi hampiran terbaik yang dicari adalah $\sin x \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{2}{\pi}$. Tentu saja ini merupakan hampiran yang masih kasar, karena kita hanya menggunakan $\{1, \cos x\}$ sebagai ruang hampirannya.

8.3 Masalah Sturm-Liouville reguler

Himpunan fungsi ortogonal $\{\cos nx : n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$ dan $\{\sin nx : n \in \mathbf{N}\}$ di $L^2(0, \pi)$ diperoleh dari masalah nilai batas

$$u''(x) + \lambda^2 u(x) = 0, \quad u'(0) = u'(\pi) = 0$$

dan

$$u''(x) + \lambda^2 u(x) = 0, \quad u(0) = u(\pi) = 0.$$

Demikian juga himpunan fungsi ortogonal $\{e^{-inx} : n \in \mathbf{Z}\}$ di $L^2(-\pi, \pi)$ dapat diperoleh dari masalah nilai batas

$$u''(x) + \lambda^2 u(x) = 0, \quad u(-\pi) = u(\pi), \quad u'(-\pi) = u'(\pi).$$

Pada bagian ini kita akan melihat bahwa ada (banyak) masalah nilai batas yang berujung pada himpunan fungsi ortogonal di $L^2(a, b)$.

Secara khusus, kita akan membahas masalah Sturm-Liouville reguler, yang berbentuk

$$(rf')' + pf + \lambda wf = 0,$$

dengan syarat batas $B_1(f) = 0$ dan $B_2(f) = 0$. Di sini r, r' dan p bernilai real dan kontinu pada $[a, b]$, $r > 0$ pada $[a, b]$, dan $w > 0$ dan kontinu pada $[a, b]$. Sementara itu, $B_1(f) = 0$ dan $B_2(f) = 0$ merupakan syarat batas yang *self-adjoint* terhadap operator $f \mapsto (rf')' + pf$ (lihat Folland, hal. 88). Lebih khusus lagi, kita akan meninjau masalah Sturm-Liouville berikut pada $[0, L]$:

$$f'' + \lambda f = 0, \quad f'(0) = \alpha f(0), \quad f'(L) = \beta f(L). \quad (1)$$

Di sini λ merupakan nilai eigen dari operator $-T$, dengan $Tf := f''$. Dapat ditunjukkan bahwa nilai eigen dari masalah ini senantiasa bernilai real (lihat Folland, hal. 89).

Perhatikan jika $\lambda = 0$, maka $f'' = 0$ memberikan $f(x) = c_1 + c_2x$, dan dari syarat batas kita peroleh $c_2 = \alpha c_1$ dan $c_2 = \beta(c_1 + c_2L)$. Akibatnya $c_1 = c_2 = 0$ atau $\beta = \frac{\alpha}{1+\alpha L}$. Tentu saja kita tidak menghendaki solusi trivial $f = 0$, karena itu kita penuhi $\beta = \frac{\alpha}{1+\alpha L}$ dan ambil $c_1 = 1$, $c_2 = \alpha$.

Selanjutnya, kita asumsikan $\lambda \neq 0$, katakan $\lambda = \nu^2$ dengan $\nu > 0$ atau $\nu = \mu i$ dengan $\mu > 0$ (tergantung apakah $\lambda > 0$ atau $\lambda < 0$). Solusi umum dari (1) adalah

$$f(x) = c_1 \cos \nu x + c_2 \sin \nu x.$$

Karena $f(0) = c_1$ dan $f'(0) = \nu c_2$, syarat batas di 0 memberikan $\nu c_2 = \alpha c_1$. Dalam hal ini, ambil $c_1 = \nu$ dan $c_2 = \alpha$, sehingga

$$f(x) = \nu \cos \nu x + \alpha \sin \nu x. \quad (2)$$

Sekarang syarat batas di L akan memberikan

$$-\nu^2 \sin \nu L + \alpha \nu \cos \nu L = \beta(\nu \cos \nu L + \alpha \sin \nu L)$$

atau

$$(\alpha - \beta)\nu \cos \nu L = (\alpha\beta + \nu^2) \sin \nu L$$

atau

$$\tan \nu L = \frac{(\alpha - \beta)\nu}{\alpha\beta + \nu^2}. \quad (3a)$$

Jika $\nu = \mu i$, maka (mengingat $\tan ix = i \tanh x$) persamaan (3a) menjadi

$$\tanh \mu L = \frac{(\alpha - \beta)\mu}{\alpha\beta - \mu^2}. \quad (3b)$$

Dalam kedua kasus, kita hanya perlu meninjau nilai ν dan μ positif karena nilai eigen dari operator $-T$ adalah ν^2 atau $-\mu^2$.

Jika ν memenuhi (3a), maka fungsi f yang memenuhi (2) merupakan fungsi eigen untuk masalah (1). Secara umum, f tidak normal, namun kita dapat menormalisasi f bila dikehendaki.

Untuk memberikan gambaran fungsi eigen seperti apa yang diperoleh, tinjau kasus $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $L = \pi$. Dalam hal ini, persamaan (3a) menjadi

$$\tan \nu \pi = \frac{2\nu}{\nu^2 - 1}, \quad (3c)$$

sementara persamaan (3b) menjadi

$$\tanh \mu \pi = -\frac{2\mu}{\mu^2 + 1}. \quad (3d)$$

Ada banyak solusi persamaan (3c): $0 < \nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \dots$ dengan $\nu_n \approx n - 1$ untuk n besar, namun tidak ada satupun solusi positif persamaan (3d). Jadi, terdapat tak terhingga banyak nilai eigen $\lambda_n = \nu_n^2$ untuk (1), dengan $\lambda_n \approx (n - 1)^2$ untuk n besar. Fungsi eigen yang berpadanan dengan λ_n adalah

$$f_n(x) := \nu_n \cos \nu_n x + \sin \nu_n x.$$

Dapat diperiksa bahwa himpunan fungsi eigen ini membentuk himpunan ortogonal di $L_w^2(0, \pi)$ yang dilengkapi dengan hasil kali dalam $\langle f, g \rangle_w := \int_0^\pi f(x) \overline{g(x)} w(x) dx$. Namun dalam contoh yang kita bahas di sini $w \equiv 1$, sehingga $L_w^2(0, \pi) = L^2(0, \pi)$.

8.4 Soal Latihan

1. Diketahui $f(x) := x$, $x \in [0, \pi]$. Tentukan hampiran terbaik (dalam norma) untuk f di $L^2(0, \pi)$, di antara fungsi-fungsi yang berbentuk
 - (a) $a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x$.
 - (b) $b_1 \sin x + b_2 \sin 2x$.
 - (c) $a \cos x + b \sin x$.
2. Buktikan bahwa himpunan fungsi eigen $\{f_n : n \in \mathbf{N}\}$ pada §8.3 merupakan himpunan ortogonal di $L^2(0, \pi)$. Hitung $\|f_n\|$ untuk tiap $n \in \mathbf{N}$.

9. Polinom Legendre, Basis Haar, dan Basis Walsh

Beberapa basis ortogonal untuk $L^2(a, b)$ merupakan himpunan polinom. Selain itu, terdapat pula basis ortogonal lainnya yang menarik.

9.1 Himpunan Polinom Ortogonal

Misalkan (a, b) suatu interval terbuka di \mathbf{R} dan $w(x)$ fungsi bernilai positif pada (a, b) sehingga $\int_a^b x^n w(x) dx$ konvergen mutlak untuk $n = 0, 1, 2, \dots$. Maka, terdapat tepat satu barisan polinom $(p_n)_{n=0}^\infty$ yang berbentuk

$$\begin{aligned} p_0(x) &:= 1 \\ p_1(x) &:= x + a_0 \\ p_2(x) &:= x^2 + b_1x + b_0 \\ p_3(x) &:= x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

yang saling ortogonal terhadap bobot w pada (a, b) , yakni

$$\langle p_i, p_j \rangle_w := \int_a^b p_i(x)p_j(x)w(x) dx = 0, \quad i \neq j.$$

Dalam hal ini, konstanta a_0 dapat diperoleh dari $\langle p_1, p_0 \rangle_w = 0$, yaitu

$$a_0 = -\frac{\int_a^b xw(x) dx}{\int_a^b w(x) dx}.$$

Selanjutnya, konstanta b_0 dan b_1 dapat diperoleh dari $\langle p_2, p_0 \rangle_w = 0$ dan $\langle p_2, p_1 \rangle_w = 0$. Bila diteruskan, maka pada langkah ke- n , terdapat n persamaan dan n konstanta yang hendak dicari nilainya.

Secara umum, kita mempunyai lemma berikut tentang polinom sembarang.

Lemma A. Misalkan $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ barisan polinom dengan p_n berderajat n untuk tiap $n = 0, 1, 2, \dots$. Maka, setiap polinom berderajat k ($k = 0, 1, 2, \dots$) merupakan kombinasi linear dari p_0, p_1, \dots, p_k .

Sebagai akibat dari Lemma A, barisan atau himpunan polinom yang dibahas di atas merentang ruang polinom pada (a, b) . Kekhususan himpunan polinom tersebut adalah keortogonalannya terhadap hasilkali dalam $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$. Pada subbab selanjutnya, kita akan berkenalan dengan himpunan polinom yang mempunyai kekhususan berbeda.

9.2 Polinom Legendre

Himpunan polinom yang akan dipelajari berikut ini merupakan himpunan fungsi eigen dari suatu Masalah Sturm-Liouville singular, namun kita tidak akan membahasnya melalui masalah nilai batas seperti pada bab sebelumnya, melainkan melalui Rumus Rodrigues

$$p_n(x) := \frac{C_n}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} [w(x)Q(x)^n]$$

dengan C_n konstanta normalisasi, $w(x)$ fungsi bobot (sehingga $p_i \perp p_j$ terhadap w), dan $Q(x)$ adalah suatu polinom tertentu. Dari rumus ini, kita dapat membuktikan keortogonalan di antara p_i dan p_j untuk $i \neq j$ terhadap w , menurunkan persamaan diferensial yang dipenuhi oleh p_n , dan menentukan konstanta normalisasinya.

Untuk $n = 0, 1, 2, \dots$, *polinom Legendre* didefinisikan sebagai

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad x \in [-1, 1].$$

Di sini, $w(x) \equiv 1$. Mengingat bahwa $(x^2 - 1)^n$ adalah polinom berderajat $2n$, maka P_n merupakan polinom berderajat n . Untuk beberapa nilai n pertama, kita dapatkan rumus untuk P_n :

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Secara umum,

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n + \dots$$

Catat bahwa untuk n genap P_n merupakan fungsi genap, dan untuk n ganjil P_n merupakan fungsi ganjil.

Teorema B. *Himpunan polinom Legendre $\{P_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ ortogonal di $L^2(-1, 1)$ dengan*

$$\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Bukti. Jika f adalah fungsi $C^{(n)}$ pada $[-1, 1]$, maka (dengan pengintegralan parsial sebanyak n kali)

$$2^n n! \langle f, P_n \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n dx = (-1)^n \int_{-1}^1 f^{(n)}(x) (x^2 - 1)^n dx.$$

Akibatnya, untuk $m < n$, kita peroleh $\langle P_m, P_n \rangle = 0$. Dengan menukar peran m dan n , jika juga peroleh $\langle P_m, P_n \rangle = 0$ untuk $m > n$.

Selanjutnya, dengan mengambil $f = P_n$, kita dapatkan

$$\|P_n\|^2 = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = \frac{2}{2n+1},$$

sesuai dengan yang diharapkan. [QED]

Kedua teorema di bawah ini dinyatakan tanpa bukti. Bila anda tertarik untuk mempelajari buktinya, lihat buku G.B. Folland "Fourier Analysis and Its Applications". (Sebagai catatan, bukti Teorema D menggunakan Teorema Aproksimasi Weierstrass yang akan dibahas pada Bab 11.)

Teorema C. *Polinom P_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, memenuhi persamaan diferensial*

$$[(1-x^2)P_n'(x)]' + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

Teorema D. *Himpunan $\{P_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ merupakan basis ortogonal untuk $L^2(-1, 1)$.*

Catatan. Menggunakan Teorema D, dapat dibuktikan bahwa $\{P_{2n} : n = 0, 1, 2, \dots\}$ dan $\{P_{2n+1} : n = 0, 1, 2, \dots\}$ merupakan basis ortogonal di $L^2(0, 1)$.

9.3 Basis Haar dan Basis Walsh

Selain himpunan polinom, terdapat basis ortonormal lainnya untuk $L^2(0,1)$ yang menarik, khususnya *basis Haar* dan *basis Walsh*.

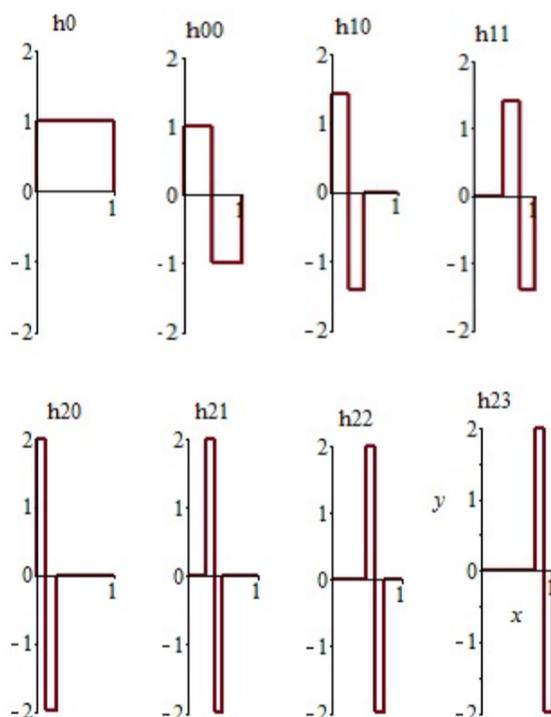
Basis Haar adalah himpunan fungsi $H := \{h_0\} \cup \{h_{jk} : j \geq 0, 0 \leq k < 2^j\}$, dengan

$$h_0(x) := \begin{cases} 1, & \text{jika } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{jika } x \text{ lainnya;} \end{cases}$$

dan

$$h_{jk}(x) := \begin{cases} 2^{j/2}, & \text{jika } 2^{-j}k < x < 2^{-j}(k+1/2), \\ -2^{j/2}, & \text{jika } 2^{-j}(k+1/2) < x < 2^{-j}(k+1), \\ 0, & \text{jika } x \text{ lainnya.} \end{cases}$$

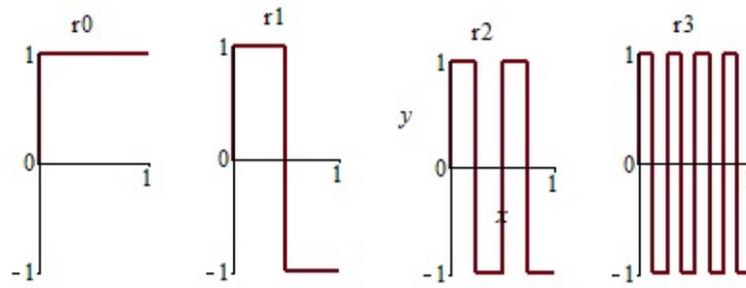
Catat bahwa fungsi h_{00} berbeda dari fungsi h_0 .



Gambar 9.3a: Beberapa Fungsi Haar

Teorema E. Himpunan fungsi H ortonormal dan lengkap di $L^2(0,1)$.

Selanjutnya, definisikan *fungsi Rademacher* r_i sebagai ‘fungsi tangga sinusoidal’ berperiode 2^{-i+1} , $i = 0, 1, 2, \dots$; yakni $r_i(x) := (-1)^{d_i(x)}$ dengan $d_i(x)$ adalah digit ke- i dari representasi biner $x := [0.d_1d_2\dots]_2$. (Di sini $x \in [0, 1]$.)



Gambar 9.3b: Beberapa Fungsi Rademacher

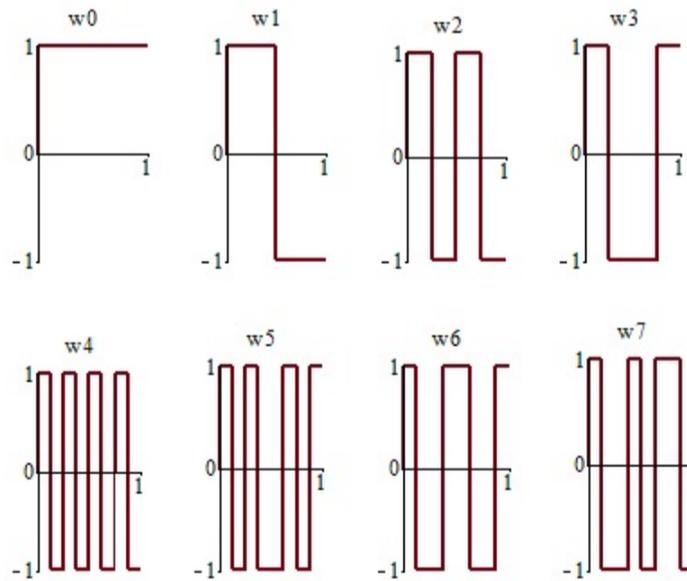
Untuk $n = 0, 1, 2, \dots$, fungsi Walsh w_n didefinisikan sebagai berikut:

$$w_0(x) := r_0(x)$$

dan untuk $n = 1, 2, 3, \dots$

$$w_n(x) := r_1(x)^{b_1} \dots r_k(x)^{b_k}$$

dengan $n = [b_k \dots b_1]_2$ menyatakan representasi biner dari n . Jadi, sebagai contoh, $w_1(x) = r_1(x)$, $w_2(x) = r_2(x)$, $w_3(x) = r_1(x)r_2(x)$, dan seterusnya.



Gambar 9.3c: Beberapa Fungsi Walsh

Teorema F. Himpunan fungsi Walsh $W := \{w_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ merupakan basis ortonormal untuk $L^2(0, 1)$.

Keortonormalan himpunan fungsi Haar dan himpunan fungsi Walsh dapat diperiksa dengan relatif mudah, namun untuk membuktikan kelengkapannya perlu pengamatan yang lebih mendalam mengenai sifat-sifat kedua himpunan ini. Sebagai contoh, himpunan bagian yang terdiri dari 2^i pertama fungsi Haar (atau fungsi Walsh) merentang subruang fungsi tangga dengan ‘lebar tangga’ 2^{-i} .

9.4 Soal Latihan

1. Tentukan a_0 , b_0 dan b_1 sedemikian sehingga $p_0(x) := 1$, $p_1(x) := x + a_0$, dan $p_2(x) := x^2 + b_1x + b_0$ saling ortogonal terhadap hasilkali dalam

$$\langle p_i, p_j \rangle := \int_0^1 p_i(x)p_j(x) x dx.$$

Nyatakan $p(x) := x^2 + 2x + 3$ sebagai kombinasi linear dari $p_0(x)$, $p_1(x)$, dan $p_2(x)$.

2. Buktikan bahwa himpunan polinom Legendre $\{P_{2n} : n = 0, 1, 2, \dots\}$ dan $\{P_{2n+1} : n = 0, 1, 2, \dots\}$ merupakan basis ortogonal untuk $L^2(0, 1)$.
3. Buktikan bahwa himpunan fungsi Haar ortonormal.
4. Buktikan bahwa himpunan fungsi Walsh ortonormal.
5. Buktikan bahwa himpunan $\{h_0, h_{00}, h_{10}, h_{11}\}$ merentang subruang fungsi tangga dengan lebar tangga $\frac{1}{4}$.
6. Buktikan bahwa himpunan $\{w_0, w_1, w_2, w_3\}$ merentang subruang fungsi tangga dengan lebar tangga $\frac{1}{4}$.

10. Transformasi Fourier

Dalam beberapa bab ke depan, kita akan membahas transformasi Fourier serta sifat-sifat dan aplikasinya. Seperti halnya pada pembahasan deret Fourier, sebagian besar materi pembahasan transformasi Fourier di sini diambil dari buku “Fourier Analysis and Its Applications” karangan G.B. Folland (Wadsworth, 1992).

10.1 Motivasi

Pada Bab 4, kita telah membahas deret Fourier pada interval $[-L, L]$ sembarang, yakni

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}, \quad |x| \leq L,$$

dengan

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Dalam hal ini, c_n menyimpan informasi tentang f dengan frekuensi $|\frac{n\pi}{L}|$. Semakin besar nilai L , semakin kerap domain frekuensinya.

Bagaimana bila $L \rightarrow \infty$? Dengan sedikit modifikasi, kita dapat menuliskan ulang rumus di atas sebagai

$$f(x) = \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n,L} e^{in\pi x/L},$$

dengan

$$c_{n,L} = \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx.$$

Selanjutnya misalkan $\Delta\xi := \frac{\pi}{L}$ dan $\xi_n := n\Delta\xi = \frac{n\pi}{L}$. Maka

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n,L} e^{i\xi_n x} \Delta\xi,$$

dengan

$$c_{n,L} = \int_{-L}^L f(x) e^{-i\xi_n x} dx.$$

Jika $f(x) \rightarrow 0$ cukup cepat untuk $|x| \rightarrow \infty$, maka $c_{n,L}$ tidak akan berbeda banyak apabila daerah pengintegralannya diperluas dari $[-L, L]$ ke $(-\infty, \infty)$, yakni

$$c_{n,L} \approx \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi_n x} dx = \widehat{f}(\xi_n), \quad n \in \mathbf{N}.$$

Dalam hal ini,

$$f(x) \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi_n) e^{i\xi_n x} \Delta\xi, \quad |x| \leq L.$$

Ini mirip dengan jumlah Riemann dari \widehat{f} pada $(-\infty, \infty)$.

Jika $L \rightarrow \infty$, maka $\Delta\xi \rightarrow 0$ dan ξ_n semakin memadati \mathbf{R} , sehingga \approx dapat digantikan dengan $=$ dan rumus di atas menjadi

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (1)$$

dengan

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx, \quad \xi \in \mathbf{R}. \quad (2)$$

Kalkulasi ini tentu saja masih merupakan kalkulasi kasar, namun untuk f tertentu kalkulasi ini berlaku. Rumus (2) disebut *transformasi Fourier* dari f , dan rumus (1) merupakan rumus inversi Fourier, yang merupakan cara untuk memperoleh f kembali dari \widehat{f} — yang akan kita buktikan kelak secara cermat.

10.2 Ruang $L^1(\mathbf{R})$ dan $L^2(\mathbf{R})$

Untuk merapikan definisi transformasi Fourier dan mempelajari sifat-sifatnya, kita perlu beberapa asumsi, istilah dan notasi. Pertama, fungsi yang akan kita bahas selanjutnya adalah fungsi yang terdefinisi pada \mathbf{R} . Seperti ketika kita mendefinisikan deret Fourier, kita asumsikan bahwa f terintegralkan (mutlak) pada \mathbf{R} . Untuk itu, kita definisikan ruang $L^1 = L^1(\mathbf{R})$ sebagai ruang semua fungsi f yang terintegralkan mutlak pada \mathbf{R} , yakni

$$L^1 := \left\{ f : \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty \right\}.$$

Ruang L^1 dilengkapi dengan norma $\|\cdot\|_1$ yang rumusnya adalah

$$\|f\|_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx.$$

Sebagai perluasan dari $L^2(a, b)$, kita juga mendefinisikan ruang $L^2 = L^2(\mathbf{R})$ sebagai ruang semua fungsi f yang kuadratnya terintegralkan, yakni

$$L^2 := \left\{ f : \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

Ruang L^2 dilengkapi dengan norma $\|\cdot\|_2$ yang rumusnya adalah

$$\|f\|_2 := \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right]^{1/2}.$$

Catat bahwa tidak ada hubungan ‘urutan’ di antara L^1 dan L^2 . Sebagai contoh, tinjau

$$f(x) = \begin{cases} x^{-2/3}, & \text{jika } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{jika } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

dan

$$g(x) = \begin{cases} x^{-2/3}, & \text{jika } x > 1, \\ 0, & \text{jika } x \text{ lainnya.} \end{cases}$$

Maka $f \in L^1$ tetapi $f \notin L^2$, sementara $g \in L^2$ tetapi $g \notin L^1$.

Walaupun demikian, ada dua fakta yang kelak berguna bagi kita mengenai kedua ruang ini, yaitu:

(1) Jika $f \in L^1$ dan f terbatas pada \mathbf{R} , maka $f \in L^2$. Persisnya

$$|f| \leq M \Rightarrow |f|^2 \leq M|f| \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

(2) Jika $f \in L^2$ dan f bernilai 0 di luar suatu interval $[a, b]$, maka $f \in L^1$. Persisnya

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \int_a^b 1 \cdot |f(x)| dx \leq (b-a)^{1/2} \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{1/2} < \infty.$$

Catatan. Ruang L^1 dan L^2 merupakan kasus khusus dari ruang Lebesgue $L^p = L^p(\mathbf{R})$, $1 \leq p \leq \infty$ yang beranggotakan semua fungsi f sedemikian sehingga $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx < \infty$. Untuk $1 \leq p < \infty$, norma pada ruang L^p adalah $\|f\|_p := \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right]^{1/p}$. Untuk $p = \infty$, norma integral digantikan dengan norma *supremum esensial*: $\|f\|_{\infty} := \text{esssup} \{|f(x)| : x \in \mathbf{R}\}$.

10.3 Transformasi Fourier

Misalkan $f \in L^1$, yakni $\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$. *Transformasi Fourier* dari f , yang kita tuliskan sebagai \widehat{f} , didefinisikan oleh

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx, \quad \xi \in \mathbf{R}.$$

Seperti halnya dalam pembahasan deret Fourier, pertanyaan kita adalah bagaimana kita dapat memperoleh f kembali dari \widehat{f} . Kesamaan (1) menyarankan kita untuk mendefinisikan *invers transformasi Fourier* dari g , yang dituliskan sebagai \check{g} , sebagai

$$\check{g}(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{ix\xi} d\xi, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Teorema inversi Fourier, yang akan kita bahas nanti, menyatakan bahwa

$$(\widehat{f})^\sim(x) = f(x), \quad \text{h.d.m.}$$

asalkan f dan \widehat{f} terintegralkan.

Sebelum sampai ke sana, kita pelajari dahulu sifat-sifat dasar transformasi Fourier.

Teorema A. *Jika $f \in L^1$, maka \widehat{f} terbatas pada \mathbf{R} .*

Bukti. Perhatikan bahwa untuk setiap $\xi \in \mathbf{R}$ berlaku

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-i\xi x} f(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \|f\|_1.$$

Jadi \widehat{f} terbatas pada \mathbf{R} , dengan $\|\widehat{f}\|_{\infty} := \text{ess sup}\{|f(x)| : x \in \mathbf{R}\} \leq \|f\|_1$. [QED]

Teorema B. *Jika $f \in L^1$, maka \widehat{f} kontinu pada \mathbf{R} .*

Bukti. Untuk setiap ξ dan $h \in \mathbf{R}$,

$$\widehat{f}(\xi + h) - \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} (e^{-ihx} - 1) f(x) dx,$$

sehingga

$$|\widehat{f}(\xi + h) - \widehat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-ihx} - 1| |f(x)| dx.$$

Integran di ruas kanan didominasi oleh $2|f(x)|$ dan menuju 0 apabila $h \rightarrow 0$. Jadi, menurut Teorema Kekonvergenan Terdominasi Lebesgue, ruas kanan mestilah menuju 0 apabila $h \rightarrow 0$, dan akibatnya ruas kiri juga menuju 0 apabila $h \rightarrow 0$. [QED]

Teorema C (Riemann-Lebesgue). Jika $f \in L^1$, maka $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.

Bukti. Perhatikan bahwa $-\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi(x+\frac{\pi}{\xi})}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \frac{\pi}{\xi})e^{-i\xi x}dx$.

Karena itu

$$2\widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(\xi) - (-\widehat{f}(\xi)) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(x) - f\left(x - \frac{\pi}{\xi}\right) \right) e^{-i\xi x} dx,$$

sehingga

$$2|\widehat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) - f\left(x - \frac{\pi}{\xi}\right) \right| dx.$$

Karena $f \in L^1$, maka (menggunakan kekontinuan dalam norma di L^1) ruas kanan akan menuju 0 apabila $|\xi| \rightarrow \infty$. Dengan demikian ruas kiri pun mestilah menuju 0 apabila $|\xi| \rightarrow \infty$. [QED]

Akibat D. Transformasi Fourier \mathcal{F} memetakan fungsi f di L^1 ke fungsi $\mathcal{F}f := \widehat{f}$ di $C_0(\mathbf{R})$.

Catatan. $C_0(\mathbf{R})$ adalah ruang fungsi kontinu dan terbatas pada \mathbf{R} dengan limit nol di $\pm\infty$. Notasi $\mathcal{F}f$ akan kita gunakan secara bergantian dengan notasi \widehat{f} untuk menyatakan transformasi Fourier dari f .

Berkenaan dengan translasi dan dilasi, transformasi Fourier mempunyai sifat sebagai berikut.

Teorema E. Misalkan $f \in L^1$ dan $a \in \mathbf{R}$.

- (i) Jika $g(x) := f(x - a)$, maka $\widehat{g}(\xi) = e^{-ia\xi} \widehat{f}(\xi)$;
- (ii) Jika $g(x) := e^{iax} f(x)$, maka $\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi - a)$.

Selanjutnya, misalkan $\delta > 0$.

- (iii) Jika $g(x) := \delta^{-1} f(x/\delta)$, maka $\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\delta\xi)$;
- (iv) Jika $g(x) := f(\delta x)$, maka $\widehat{g}(\xi) = \delta^{-1} \widehat{f}(\xi/\delta)$.

Berkenaan dengan operasi turunan dan perkalian dengan peubah bebasnya, transformasi Fourier mempunyai sifat sebagai berikut.

Teorema F. Misalkan $f \in L^1$. Jika f kontinu dan mulus bagian demi bagian pada \mathbf{R} , dan $f' \in L^1$, maka

$$(f')^\wedge(\xi) = i\xi \widehat{f}(\xi).$$

Sebaliknya, jika $g(x) := xf(x)$ terintegralkan mutlak pada \mathbf{R} , maka $\widehat{g}(\xi) = i(\widehat{f})'(\xi)$.

Berikut ini adalah beberapa contoh transformasi Fourier dari fungsi-fungsi tertentu.

Contoh 1. Jika $f = \chi_{[-a,a]}$ ($a > 0$), maka $\widehat{f}(\xi) = 2\frac{\sin a\xi}{\xi}$.

Contoh 2. Jika $f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$ ($a > 0$), maka $\widehat{f}(\xi) = \frac{\pi}{a}e^{-a|\xi|}$.

Contoh 3. Jika $f(x) = e^{-ax^2}$ ($a > 0$), maka $\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$.

Contoh 1 dapat dihitung langsung, sementara Contoh 2 memerlukan teorema residu (untuk suatu integral fungsi kompleks yang berpadanan). Untuk Contoh 3, perhatikan bahwa f memenuhi persamaan diferensial $f'(x) + 2axf(x) = 0$. Kenakan transformasi Fourier pada persamaan ini, kita peroleh persamaan diferensial yang dipenuhi oleh \widehat{f} , dan akhirnya kita peroleh rumus untuk \widehat{f} .

10.4 Soal Latihan

1. Buktikan Teorema E.
2. Buktikan Teorema F.
3. Buktikan bahwa $(f^{(n)})^\wedge(\xi) = (i\xi)^n \widehat{f}(\xi)$, untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.
4. Buktikan tiga contoh transformasi Fourier di atas.

11. Konvolusi

Operasi konvolusi yang akan kita bahas di sini sebetulnya pernah kita jumpai pada pembahasan deret Fourier (ketika membuktikan kekonvergenan jumlah parsialnya). Operasi konvolusi merupakan pengganti operasi perkalian yang ‘berjodoh’ dengan transformasi Fourier (seperti halnya operasi komposisi berjodoh dengan turunan).

11.1 Konvolusi dan sifat-sifat dasarnya

Misalkan f dan g fungsi yang terdefinisi pada \mathbf{R} . *Konvolusi* dari f dan g adalah fungsi $f * g$ yang didefinisikan sebagai

$$f * g(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy, \quad x \in \mathbf{R},$$

asalkan integral ini konvergen.

Perhatikan jika $f \in L^1$ dan g terbatas, misalkan $|g(x)| \leq M$ hampir di mana-mana, maka

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)g(y)| dy \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)| dy < \infty.$$

Hal serupa terjadi jika f terbatas dan $g \in L^1$. Selanjutnya, kita amati pula jika $f, g \in L^2$, maka

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)g(y)| dy \leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)|^2 dy \right]^{1/2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |g(y)|^2 dy \right]^{1/2} = \|f\|_2 \|g\|_2 < \infty.$$

Jadi konvolusi dari f dan g terdefinisi dengan baik setidaknya untuk beberapa kasus di atas. Lebih jauh, kita mempunyai teorema berikut.

Teorema A. *Jika $f, g \in L^1$, maka fungsi $y \mapsto f(x-y)g(y)$ ada di L^1 untuk hampir setiap $x \in \mathbf{R}$, $f * g \in L^1$, dan*

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Bukti. Fungsi $(x, y) \mapsto f(x - y)g(y)$ merupakan fungsi terukur pada \mathbf{R}^2 . Selanjutnya,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x - y)g(y)| dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)| \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |f(x - y)| dx dy = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty.$$

Jadi, hipotesis Teorema Fubini dipenuhi, dan karena itu fungsi $y \mapsto f(x - y)g(y)$ ada di L^1 untuk hampir setiap $x \in \mathbf{R}$, $f * g \in L^1$, dan

$$\begin{aligned} \|f * g\|_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)g(y) dy \right| dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x - y)g(y)| dx dy \\ &= \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty, \end{aligned}$$

sebagaimana yang diharapkan. [QED]

Teorema B (Sifat-sifat konvolusi). Misalkan $f, g, h \in L^1$ dan $a, b \in \mathbf{R}$. Maka

- (i) $a(f * g) = (af * g) = f * (ag)$;
- (ii) $f * (ag + bh) = a(f * g) + b(f * h)$;
- (iii) $f * g = g * f$;
- (iv) $f * (g * h) = (f * g) * h$.

Bukti. Latihan.

Teorema C. Misalkan f mempunyai turunan dan konvolusi $f * g$ dan $f' * g$ terdefinisi dengan baik. Maka $f * g$ mempunyai turunan dan $(f * g)' = f' * g$.

Bukti. Latihan.

Walaupun operasi konvolusi itu komutatif, kita dapat memandang salah satu fungsi, sebutlah g , sebagai *konvolutor* dalam $f * g$. Diberikan fungsi f , kira-kira apa yang dilakukan oleh konvolutor g terhadap f ? Sebagai gambaran, perhatikan contoh berikut.

Misalkan $a > 0$ dan

$$g(x) := \begin{cases} \frac{1}{2a}, & \text{jika } -a < x < a, \\ 0, & \text{jika } x \text{ lainnya.} \end{cases}$$

Maka,

$$f * g(x) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(x - y) dy = \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} f(y) dy.$$

Di sini $f * g(x)$ dapat diinterpretasikan sebagai proses perataan di sekitar x . Tetapi x berjalan; sehingga $f * g$ dapat dipandang sebagai proses ‘perataan berjalan’ terhadap f . Secara umum, hasilnya adalah suatu fungsi yang lebih mulus daripada f semula.

11.2 Identitas hampiran

Operasi konvolusi tidak mempunyai unsur identitas. Andaikan ada unsur identitas, misalnya e , maka $f * e = f$ untuk setiap $f \in L^1$. Ini mustahil, karena kita mempunyai teorema berikut.

Teorema D. Misalkan $f, g \in L^1$. Maka, $(f * g)^\wedge = \widehat{f} \widehat{g}$.

Bukti. Berdasarkan definisi, Teorema Fubini, dan substitusi peubah $z = x - y$, kita peroleh

$$\begin{aligned} (f * g)^\wedge(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)g(y)e^{-i\xi x} dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)e^{-i\xi(x-y)}g(y)e^{-i\xi y} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-i\xi z} dz g(y)e^{-i\xi y} dy \\ &= \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi). \end{aligned}$$

Dengan demikian teorema terbukti. [QED]

Akibat E. Tidak terdapat fungsi $e \in L^1$ yang memenuhi $f * e = f$ untuk setiap $f \in L^1$.

Bukti. Andaikan ada fungsi $e \in L^1$ sedemikian sehingga $f * e = f$ untuk setiap $f \in L^1$, maka $\widehat{e}(\xi) = 1$ untuk setiap $\xi \in \mathbf{R}$. Ini bertentangan dengan Teorema Riemann-Lebesgue yang mengharuskan $\widehat{e}(\xi) \rightarrow 0$ untuk $|\xi| \rightarrow \infty$. [QED]

Walau tidak ada unsur identitas terhadap operasi konvolusi, terdapat *identitas hampiran* — yang akan didefinisikan di bawah ini.

Misalkan $\phi \in L^1$. Untuk setiap $\epsilon > 0$, definisikan

$$\phi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} \phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right), \quad x \in \mathbf{R}. \quad (1)$$

Perhatikan bahwa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_\epsilon(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) d\left(\frac{x}{\epsilon}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) dy.$$

Lebih jauh, untuk $a < 0 < b$ sembarang, kita mempunyai

$$\int_a^b \phi_\epsilon(x) dx = \int_{a/\epsilon}^{b/\epsilon} \phi(y) dy,$$

yang menghampiri $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) dy$ apabila $\epsilon \approx 0$.

Teorema F. Misal $\phi \in L^1$ sedemikian sehingga $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) dy = 1$, $\alpha := \int_{-\infty}^0 \phi(y) dy$ dan $\beta := \int_0^{\infty} \phi(y) dy$ (sehingga $\alpha + \beta = 1$). Misalkan f kontinu bagian demi bagian pada \mathbf{R} , dan misalkan f terbatas atau ϕ bernilai nol di luar suatu interval terhingga – sehingga $f * \phi$ terdefinisi dengan baik. Definisikan ϕ_ϵ untuk $\epsilon > 0$, seperti pada (1). Maka

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f * \phi_\epsilon(x) = \alpha f(x+) + \beta f(x-), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Khususnya, jika f kontinu di x , maka

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f * \phi_\epsilon(x) = f(x).$$

Lebih jauh, jika f kontinu di setiap titik pada $[a, b]$, maka kekonvergenan di atas merupakan kekonvergenan seragam pada $[a, b]$.

Catatan. Keluarga fungsi $\{\phi_\epsilon\}$ disebut *identitas hampiran*, karena operasi konvolusi dengan ϕ_ϵ memberikan hampiran terhadap operator identitas bila $\epsilon \rightarrow 0$.

Bukti. Untuk setiap $x \in \mathbf{R}$ dan $\epsilon > 0$, tuliskan

$$\begin{aligned} f * \phi_\epsilon(x) - (\alpha f(x+) + \beta f(x-)) &= \int_{-\infty}^0 [f(x-y) - f(x+)] \phi_\epsilon(y) dy + \\ &+ \int_0^{\infty} [f(x-y) - f(x-)] \phi_\epsilon(y) dy. \end{aligned}$$

Akan dibuktikan bahwa kedua integral di ruas kanan dapat dibuat sekecil-kecilnya dengan cara memilih ϵ cukup kecil. Karena mirip, kita hanya akan menggarap integral kedua. Diberikan $\delta > 0$, pilih $c > 0$ cukup kecil sehingga $|f(x-y) - f(x-)| < \frac{\delta}{\|\phi\|_1}$ untuk $0 < y < c$. Di sini, c mungkin bergantung pada x , selain pada δ . Sekarang tuliskan $\int_0^{\infty} \dots = \int_0^c \dots + \int_c^{\infty} \dots$. Maka

$$\left| \int_0^c [f(x-y) - f(x-)] \phi_\epsilon(y) dy \right| < \frac{\delta}{\|\phi\|_1} \int_0^c |\phi_\epsilon| dy \leq \delta.$$

Untuk $x > c$, jika f terbatas, katakan $|f(x)| \leq M$, maka

$$\left| \int_c^\infty [f(x-y) - f(x-)] \phi_\epsilon(y) dy \right| \leq 2M \int_c^\infty |\phi_\epsilon(y)| dy = 2M \int_{c/\epsilon}^\infty |\phi(y)| dy,$$

yang dapat dibuat lebih kecil daripada δ dengan cara memilih ϵ cukup kecil (karena $\phi \in L^1$). Jika yang diketahui adalah ϕ bernilai nol di luar suatu interval $[-R, R]$, maka $\phi_\epsilon(x) = 0$ untuk $|x| > \epsilon R$. Dalam hal ini, kita pilih $\epsilon < \frac{c}{R}$ sehingga $\phi_\epsilon(x) = 0$ untuk $x > c$ (karena $c > \epsilon R$). Akibatnya,

$$\int_c^\infty [f(x-y) - f(x-)] \phi_\epsilon(y) dy = 0.$$

Jadi, sebagai kesimpulan, kita peroleh bahwa

$$\int_0^\infty [f(x-y) - f(x-)] \phi_\epsilon(y) dy \rightarrow 0,$$

bila $\epsilon \rightarrow 0$. Ini membuktikan bagian pertama dari teorema.

Selanjutnya, jika f kontinu di x , maka

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f * \phi_\epsilon(x) = \alpha f(x) + \beta f(x) = f(x).$$

Akhirnya, jika f kontinu pada $[a, b]$, maka f kontinu seragam pada $[a, b]$, sehingga pemilihan c (dan konsekuensinya juga pemilihan ϵ) dapat dibuat bebas dari $x \in [a, b]$. Dalam hal ini, $f * \phi_\epsilon(x) \rightarrow f(x)$ secara seragam pada $[a, b]$. [QED]

Teorema G. Misalkan $\phi \geq 0$ dan $\int_{-\infty}^\infty \phi(x) dx = 1$. Untuk setiap $\epsilon > 0$, definisikan $\phi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} \phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$. Maka, untuk setiap $f \in L^p$ ($1 \leq p < \infty$), kita mempunyai

$$\|\phi_\epsilon * f - f\|_p \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0.$$

Bukti. Tidak dibahas. (Lihat Hewitt & Stromberg, Teorema 21.37, bila penasaran.)

11.3 Fungsi Gauss dan Teorema Aproksimasi Weierstrass

Salah satu fungsi yang sering digunakan untuk identitas hampiran adalah fungsi Gauss $G(y) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2}$. Perhatikan bahwa

$$\left[\int_{-\infty}^\infty e^{-y^2} dy \right]^2 = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta = \pi.$$

Jadi $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$ dan $\int_{-\infty}^{\infty} G(y) dy = 1$. Selain itu, fungsi G genap, sehingga $\alpha = \int_{-\infty}^0 G(y) dy = \frac{1}{2}$ dan $\beta = \int_0^{\infty} G(y) dy = \frac{1}{2}$. Lebih jauh, $G^{(k)}(y) = P_k(y)e^{-y^2}$ untuk suatu polinom P_k berderajat k , sehingga $|G^{(k)}(y)| \leq C_k e^{-|y|}$. Jadi, jika f terbatas, maka $f * G_\epsilon$ merupakan fungsi C^∞ yang menghampiri f bila $\epsilon \approx 0$.

Teorema H (Aproksimasi Weierstrass). *Jika f kontinu pada interval terhingga $[a, b]$, maka f merupakan limit seragam dari polinom pada $[a, b]$, yakni untuk setiap $\delta > 0$ terdapat polinom P sedemikian sehingga*

$$\sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - P(x)| < \delta.$$

Bukti. Perluas f ke seluruh \mathbf{R} sehingga f kontinu dan bernilai nol di luar interval $[a - 1, b + 1]$. Maka, menurut teorema sebelumnya, $f * G_\epsilon \rightarrow f$ secara seragam pada $[a, b]$, dengan $G(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2}$. Selanjutnya, diberikan $\delta > 0$, dapat dipilih $\epsilon > 0$ cukup kecil sehingga

$$\sup_{a \leq x \leq b} \left| f(x) - \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}} \int_{a-1}^{b+1} e^{-(x-y)^2/\epsilon^2} f(y) dy \right| < \frac{\delta}{2}.$$

Sekarang, untuk $x \in [a, b]$ dan $y \in [a - 1, b + 1]$, kita mempunyai $\frac{x-y}{\epsilon} \in \left[\frac{a-b-1}{\epsilon}, \frac{b-a+1}{\epsilon} \right]$, dan deret Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}$ konvergen seragam ke e^{-t^2} pada interval tersebut. Karena itu kita dapat menghampiri $e^{-(x-y)^2/\epsilon^2}$ dengan suatu polinom Taylor, yaitu

$$\sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{x-y}{\epsilon} \right)^{2n}.$$

Di sini $N \in \mathbf{N}$ dapat kita pilih cukup besar sehingga

$$\sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - P(x)| < \delta,$$

dengan

$$P(x) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^N \int_{a-1}^{b+1} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{x-y}{\epsilon} \right)^{2n} f(y) dy.$$

Dalam hal ini P merupakan polinom (berderajat $2N$) yang kita cari. [QED]

11.4 Soal latihan

1. Diketahui $\phi = \chi_{[-1,1]}$. Tentukan
 - (i) $\phi * \phi$.
 - (ii) $\phi * \phi * \phi$.
2. Misalkan $\phi = \chi_{[-1,1]}$ dan $\phi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}\phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$. Misalkan $f(x) = x^3 - x$. Hitunglah $f * \phi_\epsilon$ dan periksa bahwa $f * \phi_\epsilon \rightarrow 2f$ bila $\epsilon \rightarrow 0$. [Catat bahwa $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) dy = 2$.]

12. Teorema Inversi Fourier dan Transformasi Fourier di $L^2(\mathbf{R})$

12.1 Teorema Inversi Fourier

Dari hasil hitung-hitungan kasar di awal Bab 10, kita ingin membuktikan bahwa, dalam kondisi tertentu, kita mempunyai

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi = (\widehat{f})^\vee(x),$$

untuk (hampir) setiap $x \in \mathbf{R}$. Melalui kesamaan inilah kita dapat memperoleh f kembali dari \widehat{f} . Tetapi kapankah kesamaan ini berlaku?

Teorema A (Teorema Inversi Fourier). Misalkan $f \in L^1$, kontinu bagian demi bagian, dan $\widehat{f} \in L^1$. Maka f kontinu dan

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi,$$

untuk setiap $x \in \mathbf{R}$.

Bukti. Misalkan $\phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ dan $\phi_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon} \phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$. Maka $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1$, sehingga menurut Teorema 11-E, $f * \phi_\epsilon(x) \rightarrow \frac{1}{2}[f(x-) + f(x+)]$ untuk setiap $x \in \mathbf{R}$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $f * \phi_\epsilon(x) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$ untuk setiap $x \in \mathbf{R}$. Untuk itu, perhatikan bahwa untuk setiap $x \in \mathbf{R}$ kita mempunyai

$$f * \phi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)^2} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} e^{-\frac{\epsilon^2 \xi^2}{2}} d\xi,$$

mengingat

$$e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)^2} = \frac{\epsilon}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}\left(e^{-\frac{\epsilon^2 \xi^2}{2}}\right)(y-x) = \frac{\epsilon}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\epsilon^2 \xi^2}{2}} e^{i\xi(x-y)} d\xi.$$

Sekarang jika $\epsilon \rightarrow 0$, maka $e^{-\frac{\epsilon^2 \xi^2}{2}} \rightarrow 1$; sehingga $\widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} e^{-\frac{\epsilon^2 \xi^2}{2}} \rightarrow \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x}$ untuk setiap $\xi \in \mathbf{R}$. Selain itu, untuk setiap $\epsilon > 0$, kita mempunyai

$$\left| \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} e^{-\frac{\epsilon^2 \xi^2}{2}} \right| \leq |\widehat{f}(\xi)|,$$

untuk setiap $\xi \in \mathbf{R}$. Karena $\widehat{f} \in L^1$, maka menurut Teorema Kekonvergenan Terdominasi Lebesgue,

$$f * \phi_\epsilon(x) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi,$$

dan ini berlaku untuk setiap $x \in \mathbf{R}$. Jadi, karena limit itu tunggal, kita peroleh

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{2} [f(x-) + f(x+)].$$

Namun, integral di ruas kiri tak lain adalah transformasi Fourier dari \widehat{f} yang dihitung di $-x$. Karena itu ia merupakan fungsi yang kontinu, sehingga f mestilah kontinu dan

$$f(x) = \frac{1}{2} [f(x-) + f(x+)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi,$$

sebagaimana yang diharapkan. [QED]

Akibat B. Misal $f, g \in L^1$ dengan $\widehat{f}, \widehat{g} \in L^1$. Jika $\widehat{f} = \widehat{g}$, maka $f = g$.

Bukti. Jika $\widehat{f} = \widehat{g}$, maka $(f - g)^\wedge = 0$. Akibatnya,

$$(f - g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (f - g)^\wedge(\xi) e^{i\xi x} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} 0 d\xi = 0,$$

untuk setiap $x \in \mathbf{R}$. [QED]

Catatan. (1) Teorema Inversi Fourier memberitahu kita bahwa transformasi Fourier mempunyai invers, yang kita sebut *transformasi Fourier invers*. Jika transformasi Fourier kita lambangkan dengan \mathcal{F} , maka transformasi Fourier invers dilambangkan dengan \mathcal{F}^{-1} . Jadi, jika $\mathcal{F}f = \widehat{f}$, maka $f = \mathcal{F}^{-1}\widehat{f} = (\widehat{f})^\vee$.

(2) Terdapat banyak fungsi f di L^1 yang transformasi Fourier-nya juga merupakan fungsi di L^1 . Sebagai contoh, jika f'' ada, f' dan f'' terintegralkan, maka $(f'')^\wedge(\xi) = -\xi^2 \widehat{f}(\xi)$ terbatas, sehingga $|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{C}{1+\xi^2}$ dan karena itu $\widehat{f} \in L^1$. Perhatikan pula bahwa dalam hal ini f dan \widehat{f} terbatas dan kontinu, sehingga keduanya merupakan fungsi di L^2 .

(3) Teorema Inversi Fourier berguna dalam menentukan transformasi Fourier: jika $\phi := \widehat{f}$, maka $f(x) = (2\pi)^{-1} \widehat{\phi}(-x)$. Dengan menuliskan $\xi = -x$, kita peroleh jika $\phi = \widehat{f}$, maka $\widehat{\phi}(\xi) = 2\pi f(-\xi)$. Rumus ini tetap berlaku di L^2 . Karena itu, sebagai contoh, kita peroleh $\mathcal{F}\left(\frac{\sin ax}{x}\right)(\xi) = \pi \chi_{[-a, a]}(\xi)$.

Teorema berikut menyatakan bahwa fungsi f dapat diperoleh kembali dari transformasi Fourier invers via *nilai utama*-nya.

Teorema C. *Jika f terintegralkan dan mulus bagian demi bagian pada \mathbf{R} , maka*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{2} [f(x-) + f(x+)],$$

untuk setiap $x \in \mathbf{R}$.

Bukti. Lihat Folland, hal. 220-221.

12.2 Transformasi Fourier di L^2

Kita telah membahas transformasi Fourier di L^1 , namun, berdasarkan pengalaman dengan deret Fourier, ruang L^2 semestinya berperan juga. Perhatikan jika $f, g \in L^1 \cap L^2$ sedemikian sehingga $\widehat{f}, \widehat{g} \in L^1 \cap L^2$, maka

$$\begin{aligned} 2\pi \langle f, g \rangle &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{g}(\xi)} e^{-i\xi x} d\xi dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{g}(\xi)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi = \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle. \end{aligned}$$

Khususnya, jika $f = g$, maka kita peroleh *kesamaan Plancherel*: $\|\widehat{f}\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2$.

Dengan menggunakan fakta bahwa $L^1 \cap L^2$ padat di L^2 , transformasi Fourier dari fungsi $f \in L^2$ dapat didefinisikan sebagai limit dari suatu barisan (\widehat{f}_n) (dalam norma L^2), dengan $f_n \in L^1 \cap L^2$ dan $f_n \rightarrow f$ ($n \rightarrow \infty$) dalam norma L^2 . Semua ini dapat dilakukan sebagaimana dijamin oleh teorema berikut:

Teorema D. *Misalkan $f \in L^2$ dan (f_n) adalah suatu barisan fungsi di $L^1 \cap L^2$ sedemikian sehingga $\widehat{f}_n \in L^1 \cap L^2$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$ dan $f_n \rightarrow f$ ($n \rightarrow \infty$) dalam norma L^2 . Maka (\widehat{f}_n) konvergen (dalam norma L^2) ke suatu fungsi di L^2 .*

Bukti. Karena L^2 lengkap, cukup kita tunjukkan bahwa $\|\widehat{f}_m - \widehat{f}_n\|_2 \rightarrow 0$ ($m, n \rightarrow \infty$). Namun $\widehat{f}_m - \widehat{f}_n$ adalah transformasi Fourier dari $f_m - f_n \in L^1 \cap L^2$. Menurut kesamaan Plancherel, kita mempunyai

$$\|\widehat{f}_m - \widehat{f}_n\|_2^2 = 2\pi \|f_m - f_n\|_2^2 \rightarrow 0$$

apabila $m, n \rightarrow \infty$, sesuai dengan yang dikehendaki. [QED]

Berdasarkan teorema di atas, sekarang kita dapat mendefinisikan transformasi Fourier dari $f \in L^2$ sebagai

$$\widehat{f} := \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f}_n \quad (\text{dalam norma } L^2),$$

untuk suatu barisan fungsi (f_n) yang memenuhi hipotesis Teorema D.

Catatan. (1) Barisan fungsi (f_n) yang memenuhi hipotesis Teorema D dapat dikonstruksi dengan menggunakan fakta bahwa setiap fungsi di L^2 dapat dihampiri oleh fungsi C^∞ yang mempunyai tumpuan (*support*) kompak.

(2) Jika $f \in L^2$ dan (f_n) adalah barisan fungsi yang memenuhi hipotesis Teorema D, maka definisi di atas mengatakan bahwa $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{f} - \widehat{f}_n\|_2 = 0$. Mengingat \widehat{f} didefinisikan hanya sebagai anggota L^2 , fungsi \widehat{f} hanya terdefinisi hampir di mana-mana, tetapi ini bukan masalah karena dua fungsi di L^2 yang bernilai sama hampir di mana-mana merupakan fungsi yang sama. Selanjutnya, jika $f \in L^1 \cap L^2$, maka sekarang kita mempunyai dua definisi untuk \widehat{f} . Namun, kedua definisi ini konsisten karena limit dalam norma L^2 mestilah sama dengan limit titik demi titiknya.

(3) Demikian pula, definisi di atas tidak bergantung pada pemilihan barisan fungsi (f_n) yang konvergen ke f dalam norma L^2 . Andaikan kita menggunakan dua barisan fungsi (f_n) dan (g_n) yang konvergen ke f dalam norma L^2 dan membandingkannya, maka

$$\|\widehat{f}_n - \widehat{g}_n\|_2^2 = 2\pi \|f_n - g_n\|_2^2 \rightarrow 0.$$

Akibatnya $\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{g}_n$ (hampir di mana-mana).

Teorema E (Kesamaan Plancherel). Jika $f \in L^2$, maka $\|\widehat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f\|_2$.

Bukti. Latihan.

Teorema F (Kesamaan Plancherel). Jika $f, g \in L^2$, maka $\langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle = 2\pi \langle f, g \rangle$.

Bukti. Latihan.

Teorema G (Inversi Fourier di L^2). Jika $f \in L^2$, maka

$$\left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi - f(x) \right\|_2 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Bukti. Lihat Rudin, hal. 186-187.

12.3 Soal Latihan

1. Buktikan Kesamaan Plancherel (yang dinyatakan dalam dua teorema sebelum teorema terakhir).
2. Diketahui $a > 0$. Buktikan secara langsung bahwa $\mathcal{F}[e^{-a|x|}](\xi) = \frac{2a}{\xi^2+a^2}$ dan kemudian dengan menggunakan Teorema Inversi Fourier tunjukkan bahwa $\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+a^2}\right](\xi) = \frac{\pi}{a}e^{-a|\xi|}$.
3. Untuk $a > 0$, definisikan $f_a(x) := \frac{a}{\pi(x^2+a^2)}$ dan $g_a(x) := \frac{\sin ax}{\pi x}$. Buktikan bahwa $f_a * f_b = f_{a+b}$ dan $g_a * g_b = g_{\min\{a,b\}}$.
4. Misalkan f kontinu dan mulus bagian demi bagian, $f \in L^2$, dan $f' \in L^2$. Buktikan bahwa $\widehat{f} \in L^1$.

13. Aplikasi Transformasi Fourier

Misal A adalah operator linear pada fungsi yang terdefinisi pada \mathbf{R} dengan sifat sebagai berikut: jika $A[f(x)] = g(x)$, maka $A[f(x+s)] = g(x+s)$ untuk setiap $s \in \mathbf{R}$. Maka, fungsi $f(x) = e^{ax}$ ($a \in \mathbf{C}$) yang ada di domain A merupakan fungsi eigen dari A . Persisnya, jika $f(x) = e^{ax}$ dan $g = Af$, maka untuk setiap $s \in \mathbf{R}$ berlaku

$$g(x+s) = A[e^{a(x+s)}] = A[e^{as}e^{ax}] = e^{as}A[e^{ax}] = e^{as}g(x).$$

Untuk $x = 0$, kita peroleh: $g(s) = g(0)e^{as}$ untuk setiap $s \in \mathbf{R}$. Jadi, $Af = g = cf$ dengan $c = g(0)$.

Selanjutnya, misalkan domain A mencakup fungsi $k(x) = e^{i\xi x}$ dan $h(\xi)$ adalah nilai eigen yang berpadanan dengan $k(x)$, yakni: $A[e^{i\xi x}] = h(\xi)e^{i\xi x}$. Jika A memenuhi suatu persyaratan kekontinuan (yang memungkinkan A bertukar dengan pengintegralan), maka operasi A pada f 'dapat dibaca' melalui rumus inversi Fourier. Persisnya, jika

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi,$$

maka

$$Af(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) A[e^{i\xi x}] d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) h(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

Jadi,

$$(Af)^\wedge(\xi) = h(\xi)\hat{f}(\xi).$$

Sekarang, jika $h(\xi) = \hat{H}(\xi)$, maka $Af = H * f$, yakni A merupakan *operator konvolusi* dengan H . Semua ini sah apabila, misalnya, f dan H merupakan fungsi L^1 atau L^2 .

13.1 Aplikasi pada persamaan panas

Sekarang kita akan melihat bagaimana transformasi Fourier digunakan pada persamaan diferensial klasik, khususnya persamaan panas pada \mathbf{R} , yaitu:

$$u_t = ku_{xx}, \quad -\infty < x < \infty,$$

dengan syarat awal $u(x, 0) = f(x)$ (dengan $f \in L^1$), dan “syarat batas” $u(x, t) \rightarrow 0$ dan $f(x) \rightarrow 0$ bila $x \rightarrow \pm\infty$.

Terapkan transformasi Fourier pada kedua ruas persamaan (yang keduanya kita anggap merupakan fungsi dari x), kita peroleh

$$\begin{aligned}\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\xi, t) &= -k\xi^2 \widehat{u}(\xi, t) \\ \widehat{u}(\xi, 0) &= \widehat{f}(\xi).\end{aligned}$$

Solusi persamaan diferensial ini adalah

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{f}(\xi)e^{-k\xi^2 t}. \quad (1)$$

Dengan Teorema Inversi Fourier, akhirnya kita peroleh solusi persamaan panas

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{-k\xi^2 t} e^{i\xi x} d\xi,$$

yang memenuhi syarat awal $u(x, 0) = f(x)$.

Namun, ada cara kedua untuk memperoleh $u(x, t)$ dari (1), sebagai berikut. Transformasi Fourier invers dari $e^{-k\xi^2 t}$ adalah $K_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}$. Jadi

$$u(x, t) = K_t * f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} f(y) dy.$$

Dapat diperiksa bahwa $u_0(x, t) = K_t(x)$ memenuhi persamaan panas dan dengan menukarkannya di bawah tanda integral $u(x, t)$ juga memenuhi persamaan panas. Lebih jauh, $K_t(x) = \frac{1}{\sqrt{t}} K_1\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ merupakan identitas hampiran, sehingga $u(x, t) \rightarrow f(x)$ bila $t \rightarrow 0$ (dengan mengasumsikan bahwa f kontinu). Jadi mestilah $u(x, 0) = f(x)$. (Catatan: Fungsi $K_1(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi k}} e^{-\frac{x^2}{4k}}$ dikenal sebagai *kernel panas* atau *kernel Gauss*.)

Sebagai interpretasi fisis, jika suhu awal adalah 0, dan kawat diberi satu satuan panas di $x = 0$, maka setelah t satuan waktu, distribusi panasnya adalah $K_t(x)$ (catat bahwa $\int_{-\infty}^{\infty} K_t(x) dx = 1$, yang berarti bahwa total panas tetap sama dengan 1 satuan panas). Jika kawat diberi satu satuan panas di $x = y$, maka distribusi panasnya adalah $K_t(x - y)$. Sekarang misalkan pada awalnya terdapat panas $f(y)dy$ pada suatu interval kecil di sekitar $x = y$. Maka, setelah t satuan waktu, distribusi panas yang berasal dari interval tersebut adalah $K_t(x - y)f(y)dy$. Dengan prinsip superposisi, kita peroleh

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_t(x - y)f(y) dy.$$

Perhatikan bahwa total panas pada saat $t > 0$ sama dengan total panas awal, yaitu sebesar $\int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy$.

13.2 Persamaan Laplace pada setengah bidang

Sekarang tinjau persamaan Laplace pada setengah bidang:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (x \in \mathbf{R}, y > 0),$$

dengan syarat awal $u(x, 0) = f(x)$ (dengan f terbatas, karena kita menginginkan solusi yang terbatas juga).

Terapkan transformasi Fourier pada kedua ruas persamaan, kita peroleh

$$-\xi^2 \hat{u}(\xi, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{u}(\xi, y) = 0,$$

dengan syarat awal $\hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi)$. Solusi persamaan diferensial ini adalah

$$\hat{u}(\xi, y) = C_1(\xi) e^{|\xi|y} + C_2(\xi) e^{-|\xi|y},$$

dengan $C_1(\xi) + C_2(\xi) = \hat{f}(\xi)$.

Karena $\hat{u}(\xi, y)$ terbatas terhadap ξ , $e^{|\xi|y}$ bukan solusi untuk setiap $y > 0$. Jadi $C_1(\xi) = 0$ dan $C_2(\xi) = \hat{f}(\xi)$, sehingga

$$\hat{u}(\xi, y) = \hat{f}(\xi) e^{-|\xi|y}.$$

Sekarang, jika $P_y(x) = \frac{y}{\pi(x^2 + y^2)}$, maka $\hat{P}_y(\xi) = e^{-|\xi|y}$ dan karena itu

$$u(x, y) = P_y * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y f(x-t)}{\pi(t^2 + y^2)} dt.$$

Rumus ini dikenal sebagai *rumus integral Poisson* dan P_1 dikenal sebagai *kernel Poisson*.

Perhatikan bahwa $P_y \in L^1$, sehingga integral Poisson terdefinisi untuk f yang terbatas. Persisnya, jika $|f| \leq M$, maka

$$|u(x, y)| \leq M \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{\pi(t^2 + y^2)} dt = M.$$

Selain itu, fungsi $u_0(x, y) = P_y(x)$ memenuhi persamaan Laplace dan membentuk identitas hampiran, sehingga $u(x, y) \rightarrow f(x)$ bila $y \rightarrow 0$.

12.3 Teorema Sampling Shannon

Kita telah mempelajari bagaimana sebuah fungsi dapat direkonstruksi dari barisan koefisien Fourier-nya. C. Shannon (1949) mengamati bahwa dalam hal khusus, sebuah fungsi bahkan dapat direkonstruksi dari titik-titik sampel-nya, dengan menggunakan keluarga fungsi sinc ($\text{sinc } x = \frac{\sin x}{x}$). Persisnya, kita mempunyai teorema berikut.

Teorema A. (Teorema Sampling Shannon) *Jika $f \in L^2(\mathbf{R})$ dan $\text{supp } \hat{f} \subseteq [-T, T]$, maka*

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} f\left(\frac{k\pi}{T}\right) \frac{\sin(Tx - k\pi)}{Tx - k\pi}$$

dalam norma $L^2(\mathbf{R})$.

Bukti. Mengingat $\hat{f} \in L^1(-T, T) \cap L^2(-T, T)$, kita dapat menguraikan \hat{f} sebagai deret Fourier

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_{-k} e^{-i\pi k \xi / T}, \quad \xi \in [-T, T],$$

dengan

$$c_{-k} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \hat{f}(\xi) e^{i\pi k \xi / T} d\xi = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\pi k \xi / T} d\xi = \frac{\pi}{T} f\left(\frac{k\pi}{T}\right).$$

Menggunakan Teorema Inversi Fourier sekali lagi, kita peroleh

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \sum_{k \in \mathbf{Z}} f\left(\frac{k\pi}{T}\right) e^{-i\pi k \xi / T} e^{i\xi x} d\xi \\ &= \frac{1}{2T} \sum_{k \in \mathbf{Z}} f\left(\frac{k\pi}{T}\right) \int_{-T}^T e^{i(x - \frac{k\pi}{T})\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2T} \sum_{k \in \mathbf{Z}} f\left(\frac{k\pi}{T}\right) \left. \frac{e^{i(x - \frac{k\pi}{T})\xi}}{i(x - \frac{k\pi}{T})} \right]_{-T}^T \\ &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} f\left(\frac{k\pi}{T}\right) \frac{\sin(Tx - k\pi)}{Tx - k\pi}, \end{aligned}$$

di mana deret konvergen dalam norma $L^2(\mathbf{R})$. [QED]

Catatan. Himpunan bilangan $\{f(\frac{k\pi}{T}) : k \in \mathbf{Z}\}$ disebut *sampel*. Teorema di atas mengatakan bahwa f dapat direkonstruksi dari sampel tersebut dengan menggunakan

keluarga fungsi $\left\{ \frac{\sin(Tx - k\pi)}{Tx - k\pi} : k \in \mathbf{Z} \right\}$. Hal ini sebetulnya tidaklah mengejutkan, karena $s_k(x) = \frac{\sin(Tx - k\pi)}{Tx - k\pi}$, yang merupakan invers transformasi Fourier dari $\widehat{s}_k(\xi) = \chi_{[-T, T]}(\xi) e^{-i\pi k\xi/T}$, membentuk basis ortogonal untuk $\{f \in L^2(\mathbf{R}) : \text{supp } \widehat{f} \subseteq [-T, T]\}$. Berdasarkan fakta ini dan kesamaan Parseval, kita peroleh $f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \|s_k\|_2^{-2} \langle f, s_k \rangle s_k = \frac{T}{\pi} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \langle \widehat{f}, \widehat{s}_k \rangle s_k = \sum_{k \in \mathbf{Z}} f\left(\frac{k\pi}{T}\right) s_k$.

12.4 Ketaksamaan Heisenberg

Jika $f(t)$ menyatakan sinyal dengan $\text{supp } \widehat{f} \subseteq [-T, T]$ untuk suatu $T > 0$, maka f dikatakan mempunyai frekuensi terbatas (*band-limited*). Ketaksamaan Heisenberg yang akan kita bahas di sini menyatakan bahwa f dan \widehat{f} tidak mungkin sama-sama mempunyai tumpuan (*support*) yang terbatas, kecuali $f \equiv 0$. Dalam perkataan lain, f tidak mungkin mempunyai waktu dan frekuensi terbatas. Secara intuitif, ini sama saja dengan mengatakan bahwa f dan \widehat{f} tidak mungkin terlokalisasi dengan baik secara bersamaan: jika f terkonsentrasi di sekitar suatu titik, maka \widehat{f} mestilah tersebar pada \mathbf{R} ; dan sebaliknya.

Untuk melihat fakta ini secara kuantitatif, definisikan *dispersi* f di sekitar $x = a$ sebagai

$$\Delta_a f := \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 |f(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx}.$$

Di sini $\Delta_a f$ merupakan suatu ukuran seberapa besar f tersebar menjauhi a . Jika nilai f terkonsentrasi di sekitar a , maka faktor $(x - a)^2$ akan membuat pembilang pada $\Delta_a f$ lebih kecil daripada penyebutnya, sehingga $\Delta_a f < 1$. Namun, jika nilai f tersebar jauh dari a , maka pembilang pada $\Delta_a f$ lebih besar daripada penyebutnya, sehingga $\Delta_a f > 1$. Semakin besar nilai $\Delta_a f$, semakin tersebar f jauh dari a .

Teorema B. (Ketaksamaan Heisenberg) Untuk setiap $f \in L^2$, dan untuk setiap $a, \alpha \in \mathbf{R}$, berlaku

$$(\Delta_a f)(\Delta_\alpha \widehat{f}) \geq \frac{1}{4}.$$

Bukti. Asumsikan f kontinu dan mulus bagian demi bagian pada \mathbf{R} , dan $xf(x)$ serta $f'(x)$ di L^2 . (Jika $xf(x) \notin L^2$, maka $\Delta_a f = \infty$; sementara jika $f'(x) \notin L^2$, maka

$\Delta_\alpha \hat{f} = \infty$.) Tinjau kasus $a, \alpha = 0$ terlebih dahulu. Dengan pengintegralan parsial, kita peroleh

$$\int_A^B \overline{xf(x)} f'(x) dx = x|f(x)|^2 \Big|_A^B - \int_A^B (|f(x)|^2 + xf(x)\overline{f'(x)}) dx,$$

atau

$$\int_A^B |f(x)|^2 dx = -2\operatorname{Re} \int_A^B \overline{xf(x)} f'(x) dx + x|f(x)|^2 \Big|_A^B,$$

untuk $-\infty < A < B < \infty$. Karena $f(x)$, $xf(x)$, dan $f'(x)$ di L^2 , limit kedua integral di atas ada untuk $A \rightarrow -\infty$ dan $B \rightarrow \infty$. Karena itu, limit $A|f(A)|^2$ dan $B|f(B)|^2$ juga ada, dan mestilah bernilai 0 (karena bila tidak, maka $|f(x)| \sim |x|^{-1/2}$ untuk $|x| \gg 1$, bertentangan dengan asumsi bahwa $f \in L^2$). Akibatnya, kita peroleh

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = -2\operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{xf(x)} f'(x) dx.$$

Dengan ketaksamaan Cauchy-Schwarz, kita dapatkan

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^2 \leq 4 \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2 dx \right).$$

Berdasarkan kesamaan Plancherel, $\int |f|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int |\hat{f}|^2 d\xi$, sehingga

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |(f')^\wedge(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Dengan demikian kita peroleh

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right) \leq 4 \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right).$$

Ini membuktikan bahwa $(\Delta_0 f)(\Delta_0 \hat{f}) \geq \frac{1}{4}$.

Untuk kasus $a, \alpha \in \mathbf{R}$ sembarang, misalkan $F(x) := e^{-i\alpha x} f(x+a)$. Maka F memenuhi hipotesis teorema selama f memenuhi, $\Delta_a f = \Delta_0 F$ dan $\Delta_\alpha \hat{f} = \Delta_0 \hat{F}$. Jadi

$$(\Delta_a f)(\Delta_\alpha \hat{f}) = (\Delta_0 F)(\Delta_0 \hat{F}) \geq \frac{1}{4},$$

sebagaimana diharapkan. [QED]

Catatan. Dalam mekanika kuantum, suatu partikel yang bergerak sepanjang sumbu- x disebut sebagai suatu “fungsi gelombang” $f(x)$, yang memiliki peluang total $\|f\|_2 = 1$.

Dalam hal ini $|f(x)|^2$ merupakan fungsi densitas peluang untuk posisi partikel tersebut, sehingga $\int_a^b |f(x)|^2 dx$ menyatakan seberapa besar peluang partikel berada pada interval $[a, b]$. Sementara itu, \hat{f} terkait dengan fungsi densitas peluang untuk momentum partikel tersebut. Persisnya, jika kita definisikan

$$\tilde{f}(p) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixp/\hbar} dx$$

dengan \hbar menyatakan *konstanta Planck*, maka $\|\tilde{f}\|_2 = 1$ dan karenanya $|\tilde{f}(p)|^2$ merupakan fungsi densitas peluang untuk momentum partikel tersebut. Ketaksamaan Heisenberg yang kita bahas di atas dikenal pula sebagai Prinsip Ketidakpastian Heisenberg yang menyatakan bahwa $(\Delta_a f)(\Delta_\alpha \tilde{f}) \geq \frac{\hbar^2}{4}$.

13.5 Soal latihan

1. Buktikan bahwa $K_t(x)$ memenuhi persamaan panas dan membentuk identitas hampiran.
2. Buktikan bahwa solusi persamaan panas mengawetkan total panas, yakni total panas pada saat $t > 0$ sama dengan total panas awal.
3. Buktikan bahwa $P_y(x)$ memenuhi persamaan Laplace dan membentuk identitas hampiran.
4. Dengan menggunakan transformasi Fourier, buktikan bahwa solusi persamaan gelombang $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ dengan syarat awal $u(x, 0) = f(x)$ dan $u_t(x, 0) = g(x)$ adalah

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x - ct) + f(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(y) dy.$$

5. Verifikasi Teorema Sampling Shannon berdasarkan catatan di akhir subbab 12.3, khususnya bahwa keluarga fungsi $\left\{ \frac{\sin(Tx - k\pi)}{Tx - k\pi} : k \in \mathbf{Z} \right\}$ membentuk keluarga fungsi ortogonal.
6. Buktikan jika $f \in L^2$ dan $xf(x) \notin L^2$, maka $\Delta_a f = \infty$.

14. Transformasi Fourier dan Masalah Sturm-Liouville

Pada bagian ini kita akan mempelajari transformasi Fourier dan masalah Sturm-Liouville singular pada setengah garis. Namun, sebelum kita sampai di sana, mari kita tinjau kembali persamaan panas pada $(-\infty, \infty)$:

$$u_t = k u_{xx}.$$

Bila kita misalkan $u(x, t) = X(x)T(t)$, maka kita peroleh

$$X'' + \xi^2 X = 0 \quad \text{dan} \quad T' = -\xi^2 k T,$$

dengan ξ^2 merupakan konstanta pemisahannya. Dari kedua persamaan ini, kita akan mendapatkan bahwa untuk $-\infty < \xi < \infty$, fungsi $e^{-\xi^2 kt} e^{i\xi x}$ merupakan solusi. Dengan prinsip superposisi, kita peroleh solusi persamaan panas

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\xi) e^{-\xi^2 kt} e^{i\xi x} d\xi.$$

Jika diketahui syarat awal $u(x, 0) = f(x)$, maka dari rumus inversi Fourier kita simpulkan bahwa $C(\xi) = \frac{1}{2\pi} \widehat{f}(\xi)$, sehingga

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{-\xi^2 kt} e^{i\xi x} d\xi,$$

sama seperti yang kita peroleh sebelumnya pada Bab 13.

14.1 Masalah Sturm-Liouville Singular

Apa yang akan kita bahas sekarang adalah masalah Sturm-Liouville singular:

$$X'' + \xi^2 X = 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

Solusi umum persamaan ini adalah

$$C_1 e^{i\xi x} + C_2 e^{-i\xi x}, \quad \text{untuk } \xi \neq 0;$$

atau

$$C_1 + C_2 x, \quad \text{untuk } \xi = 0.$$

Tak satupun di antara fungsi ini merupakan anggota $L^2(\mathbf{R})$, kecuali untuk kasus trivial $C_1 = C_2 = 0$. Jadi, tidak ada kemungkinan untuk menemukan basis ortonormal dari keluarga fungsi eigen ini.

Sebagai gantinya, dengan menggunakan rumus inversi Fourier, kita dapat menyatakan setiap fungsi $f \in L^2(\mathbf{R})$ sebagai

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [\widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} + \widehat{f}(-\xi) e^{-i\xi x}] d\xi, \quad (1)$$

dengan interpretasi yang sesuai terhadap integral tersebut.

Perlu dijelaskan di sini mengapa hanya $\xi \in \mathbf{R}$ yang muncul. Jika $Im(\xi) \neq 0$, maka $|e^{i\xi x}| \rightarrow \infty$ untuk $|x| \rightarrow \infty$. Jadi $e^{i\xi x}$ tidak cocok bila dipandang dengan kaca mata ruang $L^2(\mathbf{R})$. Jika $\xi \in \mathbf{R}$, maka $e^{i\xi x} \notin L^2$ tetapi cukup dekat dari $L^2(\mathbf{R})$, sehingga $e^{i\xi x}$ masih dapat dipakai sebagai fungsi eigen untuk merekonstruksi f seperti dalam (1).

Berdasarkan (1), mari kita tinjau dua masalah Sturm-Liouville berikut pada setengah garis $[0, \infty)$:

$$X'' + \xi^2 X = 0, \quad X'(0) = 0; \quad (2)$$

$$X'' + \xi^2 X = 0, \quad X(0) = 0. \quad (3)$$

Solusi (2) adalah kelipatan $\cos \xi x$, sementara solusi (3) adalah kelipatan $\sin \xi x$. Kedua fungsi ini bukan anggota $L^2(0, \infty)$, jadi tidak ada basis ortonormal dari keluarga fungsi ini. Namun, kita bisa mencari rumus integral berikut:

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(\xi) \cos \xi x d\xi, \quad (4)$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} B(\xi) \sin \xi x d\xi, \quad (5)$$

untuk $f \in L^2(0, \infty)$.

Jika $f \in L^1(\mathbf{R})$ dan f merupakan fungsi genap, maka

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos \xi x - i \sin \xi x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \xi x dx = 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos \xi x dx. \quad (6a)$$

Jadi \widehat{f} juga genap, dan rumus inversi Fourier menjadi

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)(\cos \xi x + i \sin \xi x) d\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \widehat{f}(\xi) \cos \xi x d\xi. \quad (6b)$$

Dengan cara yang serupa, jika f merupakan fungsi ganjil, maka \widehat{f} juga ganjil dan

$$\widehat{f}(\xi) = -2i \int_0^{\infty} f(x) \sin \xi x dx; \quad (7a)$$

$$f(x) = \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \widehat{f}(\xi) \sin \xi x d\xi. \quad (7b)$$

Rumus-rumus ini hanya melibatkan nilai f dan \widehat{f} pada $[0, \infty)$, jadi domain f dan \widehat{f} dapat dibatasi pada $[0, \infty)$.

14.2 Transformasi cosinus Fourier dan transformasi sinus Fourier

Misalkan $f \in L^1(0, \infty)$. *Transformasi cosinus Fourier* dan *transformasi sinus Fourier* dari f didefinisikan sebagai

$$\mathcal{F}_c f(\xi) := \int_0^{\infty} f(x) \cos \xi x dx;$$

$$\mathcal{F}_s f(\xi) := \int_0^{\infty} f(x) \sin \xi x dx.$$

Dari perhitungan di atas, kita peroleh rumus inversinya:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \mathcal{F}_c f(\xi) \cos \xi x d\xi;$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \mathcal{F}_s f(\xi) \sin \xi x d\xi;$$

Di sini, integral mesti ditafsirkan secara pas. Misalnya, jika f kontinu bagian demi bagian pada $(0, \infty)$, maka

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\epsilon^2 \xi^2 / 2} \mathcal{F}_c f(\xi) \cos \xi x d\xi = \frac{1}{2} [f(x-) + f(x+)].$$

Teorema A (Kesamaan Plancherel). Jika $f, \mathcal{F}_c f$ dan $\mathcal{F}_s f$ merupakan anggota $L^1 \cap L^2(0, \infty)$, maka

$$\|\mathcal{F}_c f\|^2 = \|\mathcal{F}_s f\|^2 = \frac{\pi}{2} \|f\|^2.$$

Bukti. Perluas f menjadi f_{genap} dan f_{ganjil} yang terdefinisi pada \mathbf{R} . Maka $\mathcal{F}_c f$ dan $\mathcal{F}_s f$ adalah pembatasan dari $\frac{1}{2}\widehat{f}_{\text{genap}}$ dan $\frac{i}{2}\widehat{f}_{\text{ganjil}}$ pada $(0, \infty)$, sehingga

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\mathcal{F}_c f(\xi)|^2 d\xi &= \frac{1}{4} \int_0^\infty |\widehat{f}_{\text{genap}}(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{8} \int_{-\infty}^\infty |\widehat{f}_{\text{genap}}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{\pi}{4} \int_{-\infty}^\infty |f_{\text{genap}}|^2 dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty |f(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Serupa dengan itu, kita juga mempunyai

$$\int_0^\infty |\mathcal{F}_s f(\xi)|^2 d\xi = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty |f(x)|^2 dx.$$

Dengan demikian kesamaan Plancherel terbukti. [QED]

Catatan. Sebagai akibat dari kesamaan Plancherel, kedua rumus inversi Fourier di atas berlaku pula untuk $f \in L^2(0, \infty)$.

14.3 Aplikasi pada persamaan panas

Sebagai aplikasi dari transformasi cosinus Fourier, mari sekarang kita tinjau persamaan panas pada $(0, \infty)$:

$$u_t = k u_{xx}, \quad x, t > 0,$$

dengan syarat batas $u_x(0, t) = 0$ dan syarat awal $u(x, 0) = f(x)$. Metode pemisahan peubah dan syarat batas akan memberikan solusi $e^{-\xi^2 kt} \cos \xi x$ untuk $\xi > 0$, sehingga kita peroleh

$$u(x, t) = \int_0^\infty C(\xi) e^{-\xi^2 kt} \cos \xi x d\xi.$$

Substitusikan $t = 0$, kita dapatkan

$$f(x) = \int_0^\infty C(\xi) \cos \xi x d\xi.$$

Jadi $C(\xi) = \frac{2}{\pi} \mathcal{F}_c f(\xi)$, sehingga kita peroleh solusi dalam bentuk *integral Fourier*:

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \mathcal{F}_c f(\xi) e^{-\xi^2 kt} \cos \xi x d\xi. \quad (8)$$

Selanjutnya, dapat diperiksa bahwa

$$e^{-\xi^2 kt} = \mathcal{F}_c[g_t](\xi)$$

dengan

$$g_t(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}.$$

Jadi persamaan (8) dapat ditulis ulang sebagai

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \mathcal{F}_c f(\xi) \mathcal{F}_c[g_t](\xi) \cos \xi x d\xi.$$

Namun, dapat dibuktikan jika F dan G_t adalah perluasan genap dari f dan g_t pada \mathbf{R} , maka $(F * G_t)^\wedge(\xi) = \widehat{F}(\xi)\widehat{G}_t(\xi)$ setara dengan

$$\mathcal{F}_c f(\xi) \mathcal{F}_c[g_t](\xi) = \mathcal{F}_c h(\xi),$$

dengan $2h$ merupakan pembatasan dari $F * G_t$ pada $(0, \infty)$. Dari sini kita simpulkan bahwa

$$u(x, t) = \frac{1}{2} F * G_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_0^\infty f(y) \left[e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} + e^{-\frac{(x+y)^2}{4kt}} \right] dy.$$

Dapat diperiksa bahwa $u(x, t) \rightarrow f(x)$ bila $t \rightarrow 0^+$.

14.4 Soal latihan

1. Buktikan jika F dan G_t adalah perluasan genap dari f dan g_t pada \mathbf{R} , maka rumus $(F * G_t)^\wedge(\xi) = \widehat{F}(\xi)\widehat{G}_t(\xi)$ setara dengan

$$\mathcal{F}_c f(\xi) \mathcal{F}_c[g_t](\xi) = \mathcal{F}_c h(\xi),$$

dengan $2h$ merupakan pembatasan dari $F * G_t$ pada $(0, \infty)$.

2. Misalkan F adalah fungsi genap yang terdefinisi pada \mathbf{R} dan $u = u(x, t)$ adalah solusi persamaan panas pada \mathbf{R} :

$$u_t = ku_{xx}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0,$$

dengan syarat awal $u(x, 0) = F(x)$. Buktikan bahwa $v = u(x, t)|_{x>0}$ adalah solusi persamaan panas pada $(0, \infty)$:

$$u_t = ku_{xx}, \quad x, t > 0,$$

dengan syarat batas $u_x(0, t) = 0$ dan syarat awal $u(x, 0) = f(x)$, di mana f adalah pembatasan F pada $(0, \infty)$.

15. Wavelet

Pada Bab 8 kita membahas bahwa $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx} : n \in \mathbf{Z}\}$ merupakan basis ortonormal untuk $L^2(-\pi, \pi)$ yang berkaitan dengan deret Fourier klasik pada $L^2(-\pi, \pi)$. Bila kita mundur ke Bab 4, maka kita juga mempunyai basis ortonormal $\{e^{2\pi inx} : n \in \mathbf{Z}\}$ untuk $L^2(0, 1)$. Pada bab ini dan bab berikutnya, kita akan mempelajari basis ortonormal ‘yang dibangun oleh sebuah fungsi’.

15.1 Menengok kembali basis Haar

Pada Bab 9, kita juga telah melihat bahwa himpunan fungsi $H := \{h_0\} \cup \{h_{jk} : j \geq 0, 0 \leq k < 2^j\}$, dengan

$$h_0(x) := \begin{cases} 1, & \text{jika } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{jika } x \text{ lainnya;} \end{cases}$$

dan

$$h_{jk}(x) := \begin{cases} 2^{j/2}, & \text{jika } 2^{-j}k < x < 2^{-j}(k + 1/2), \\ -2^{j/2}, & \text{jika } 2^{-j}(k + 1/2) < x < 2^{-j}(k + 1), \\ 0, & \text{jika } x \text{ lainnya.} \end{cases}$$

merupakan basis ortonormal untuk $L^2(0, 1)$. Basis ini pertama kali diperkenalkan oleh Haar (1910) dan sekarang dikenal sebagai *basis Haar*.

Sekitar 80 tahun kemudian, peneliti menyadari bahwa basis Haar termasuk apa yang sekarang dinamakan sebagai *wavelet*. Fungsi h_0 disebut *fungsi skala Haar* dan fungsi h_{00} disebut *wavelet Haar*.

Perhatikan dua operasi dasar yang dilakukan terhadap $h_{00}(x)$ untuk memperoleh $h_{10}(x) = \sqrt{2}h_{00}(2x)$ dan $h_{11}(x) = \sqrt{2}h_{00}(2x - 1)$, yakni *dilasi* dan *translasi* (selain perkalian dengan $\sqrt{2}$ untuk normalisasi). Anggota basis selanjutnya juga diperoleh dengan dua operasi ini. Jadi, basis Haar adalah keluarga fungsi

$$h_0(x), \text{ plus } h_{jk}(x) := 2^{j/2}h_{00}(2^j x - k), \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, 2^j - 1.$$

Basis ini dapat diperluas sehingga menjadi basis ortonormal untuk $L^2(\mathbf{R})$, sebagaimana akan kita lihat nanti.

Bila kita bekerja dengan, misalnya, fungsi tangga, menggunakan basis ini tentunya akan lebih menguntungkan. Lebih daripada itu, ketika kita memakai komputer untuk perhitungan, basis Haar terasa lebih efisien karena bekerja dalam sistem biner seperti halnya komputer. Keuntungan yang lebih esensial menggunakan basis Haar adalah bahwa basis ini dapat dipakai untuk menganalisis frekuensi dan waktu secara simultan, suatu hal yang tidak dapat dilakukan dengan baik oleh deret atau transformasi Fourier (karena adanya ketaksamaan Heisenberg).

Walaupun basis ortonormal Haar telah dikenal sejak awal abad ke-20, teori wavelet baru berkembang sejak tahun 1980-an. Kini wavelet mulai menggeser peran deret Fourier dalam berbagai aplikasi.

15.2 Wavelet ortonormal

Materi berikut disadur dari buku “A First Course on Wavelets” karangan E. Hernandez & G. Weiss (CRC Press).

Sebagaimana disinggung di atas, basis Haar dapat diperluas menjadi basis ortonormal untuk $L^2(\mathbf{R})$. Persisnya, misalkan

$$\psi(x) := \begin{cases} 1, & \text{jika } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1, & \text{jika } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0, & \text{jika } x < 0 \text{ atau } x \geq 1. \end{cases}$$

Maka, $\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$, $j, k \in \mathbf{Z}$, membentuk basis ortonormal Haar untuk $L^2(\mathbf{R})$. (Catat bahwa $\psi_{j,k}$ sama dengan fungsi Haar $h_{j,k}$ yang dibahas sebelumnya. Namun sekarang fungsi ini didefinisikan pada \mathbf{R} dan untuk semua $j, k \in \mathbf{Z}$. Selain itu, fungsi skala Haar h_0 tidak muncul di sini.)

Keortonormalan $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbf{Z}\}$ mudah diperiksa, tetapi kelengkapannya perlu dibuktikan dengan cermat. Semuanya akan menjadi jelas pada saat kita membahas konsep *analisis multi resolusi* nanti.

Periksa bahwa jika kita membatasi diri bekerja pada $[0, 1]$, maka

$$\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\psi(2^j x - k), \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$$

plus

$$h_0(x) := 1$$

merupakan basis Haar untuk $L^2(0, 1)$, yang telah kita bahas sebelumnya. (Peran $\psi_{j,k}$ yang lainnya dalam hal ini dimainkan oleh h_0 .)

Selanjutnya, kita akan lebih banyak bekerja di $L^2(\mathbf{R})$. Fungsi $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ sedemikian sehingga

$$\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbf{Z},$$

membentuk suatu basis ortonormal untuk $L^2(\mathbf{R})$ disebut *wavelet ortonormal* atau singkatnya *wavelet* pada \mathbf{R} . Selain wavelet Haar, kita mempunyai contoh wavelet lainnya.

Contoh 1. Misalkan

$$\psi(x) := \frac{\sin 2\pi x - \sin \pi x}{\pi x}.$$

Maka, $\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$, $j, k \in \mathbf{Z}$, membentuk suatu basis ortonormal untuk $L^2(\mathbf{R})$. Basis ini dikenal sebagai *basis wavelet sinc* atau *wavelet Shannon*.

Menggunakan Teorema Inversi Fourier kita dapat menunjukkan bahwa $\widehat{\psi}(\xi) = \chi_I(\xi)$ dengan $I := [-2\pi, -\pi] \cup [\pi, 2\pi]$. Bahwa ψ sungguh merupakan wavelet ortonormal pada \mathbf{R} dapat ditunjukkan sebagai berikut.

Pertama kita selidiki keortonormalannya. Perhitungan sederhana akan menghasilkan

$$\widehat{\psi}_{j,k}(\xi) = 2^{-j/2} e^{-i2^{-j}\xi k} \widehat{\psi}(2^{-j}\xi).$$

Untuk $j \neq l$, fakta di atas menunjukkan bahwa $\text{supp}(\widehat{\psi}_{j,k}) \cap \text{supp}(\widehat{\psi}_{l,m})$ berukuran nol, sehingga

$$2\pi \langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = \langle \widehat{\psi}_{j,k}, \widehat{\psi}_{l,m} \rangle = 0,$$

untuk sebarang $k, m \in \mathbf{Z}$. Sementara itu, untuk $j = l$ dan $k, m \in \mathbf{Z}$ sembarang, kita mempunyai

$$\begin{aligned} 2\pi \langle \psi_{j,k}, \psi_{j,m} \rangle &= 2^{-j} \int_{\mathbf{R}} e^{i2^{-j}\xi(m-k)} |\widehat{\psi}(2^{-j}\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{-2\pi}^{-\pi} e^{i\zeta(m-k)} d\zeta + \int_{\pi}^{2\pi} e^{i\zeta(m-k)} d\zeta \\ &= 2\pi \delta_{k,m}. \end{aligned}$$

Untuk menunjukkan bahwa keluarga fungsi $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbf{Z}\}$ lengkap, kita periksa Kesamaan Parseval. Berdasarkan Kesamaan Plancherel untuk transformasi Fourier kita mempunyai

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \sum_{k \in \mathbf{Z}} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \sum_{k \in \mathbf{Z}} 2^{-j} \left| \int_{\mathbf{R}} \widehat{f}(\xi) e^{i2^{-j}\xi k} \overline{\widehat{\psi}(2^{-j}\xi)} d\xi \right|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in \mathbf{Z}} 2^j \sum_{k \in \mathbf{Z}} \left| \int_I \widehat{f}(2^j\zeta) \frac{e^{i\zeta k}}{\sqrt{2\pi}} d\zeta \right|^2. \end{aligned}$$

Mengingat $\{\frac{e^{i\zeta k}}{\sqrt{2\pi}} : k \in \mathbf{Z}\}$ adalah suatu basis ortonormal untuk $L^2(I)$, kita peroleh

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \sum_{k \in \mathbf{Z}} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in \mathbf{Z}} 2^j \int_I |\widehat{f}(2^j\zeta)|^2 d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \int_{\mathbf{R}} \chi_I(2^{-j}\xi) |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \chi_I(2^{-j}\xi) |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \|\widehat{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2, \end{aligned}$$

karena $\sum_{j \in \mathbf{Z}} \chi_I(2^{-j}\xi) = 1$ hampir untuk setiap $\xi \in \mathbf{R}$.

Dengan demikian, $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbf{Z}\}$ ortonormal dan lengkap di $L^2(\mathbf{R})$, sehingga ψ merupakan suatu wavelet ortonormal pada \mathbf{R} .

Teorema di bawah ini memberikan syarat perlu dan cukup untuk keortonormalan keluarga fungsi $\psi_{j,k}$, $j, k \in \mathbf{Z}$. Untuk buktinya, lihat buku Hernandez & Weiss.

Teorema A (Syarat perlu dan cukup untuk keortonormalan). *Misalkan $\psi \in L^2(\mathbf{R})$. Maka $\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$, $j, k \in \mathbf{Z}$ membentuk keluarga ortonormal jika dan hanya jika*

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\widehat{\psi}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1 \quad \text{h.d.m.} \quad (1)$$

dan

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} \widehat{\psi}(2^j(\xi + 2k\pi)) \overline{\widehat{\psi}(\xi + 2k\pi)} = 0 \quad \text{h.d.m.}, \quad j \in \mathbf{N}. \quad (2)$$

Persyaratan (1) dan (2) tidak menjamin bahwa $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbf{Z}\}$ lengkap. Teorema di bawah ini memberikan kriteria kelengkapan keluarga ortonormal $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbf{Z}\}$.

Teorema B (Kriteria kelengkapan suatu keluarga ortonormal). Misalkan $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ sedemikian sehingga $\text{supp } \widehat{\psi} \subseteq I$ untuk suatu interval terbatas $I \subseteq \mathbf{R}$ dan $\widehat{\psi}$ bernilai 0 pada suatu lingkungan di sekitar 0. Misalkan $\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$, $j, k \in \mathbf{Z}$ membentuk keluarga ortonormal. Maka, $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbf{Z}\}$ lengkap jika dan hanya jika

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}} |\widehat{\psi}(2^j \xi)|^2 = 1 \quad \text{h.d.m.} \quad (3)$$

dan

$$\sum_{j=0}^{\infty} \widehat{\psi}(2^j \xi) \overline{\widehat{\psi}(2^j(\xi + 2k\pi))} = 0 \quad \text{h.d.m.}, \quad k \in 2\mathbf{Z} + 1. \quad (4)$$

Dapat diperiksa dengan mudah bahwa wavelet Shannon memenuhi (1) dan (3).

15.3 Basis ortonormal yang dibangun oleh sebuah fungsi

Seperti telah kita lihat di atas, dari sebuah wavelet kita dapat memperoleh suatu basis ortonormal. Cara lain untuk memperoleh suatu basis ortonormal dari sebuah fungsi adalah dengan melibatkan operasi translasi dan *modulasi*.

Sebagai contoh, suatu basis ortonormal untuk $L^2(\mathbf{R})$ dapat dikonstruksi sebagai berikut. Kita sudah mengenal basis ortonormal $\{e^{2\pi i m x} : m \in \mathbf{Z}\}$ untuk $L^2(0, 1)$. Sekarang, jika kita definisikan

$$g_{m,n}(x) := e^{2\pi i m x} g(x - n), \quad m, n \in \mathbf{Z},$$

dengan $g := \chi_{[0,1]}$, maka tidak terlalu sulit bagi kita untuk menunjukkan bahwa $\{g_{m,n} : m, n \in \mathbf{Z}\}$ adalah suatu basis ortonormal untuk $L^2(\mathbf{R})$. Basis semacam ini digunakan oleh D. Gabor (1946) untuk menangani persoalan dalam komunikasi.

Teorema di bawah ini memberikan suatu syarat perlu yang harus dipenuhi oleh $g \in L^2(\mathbf{R})$ agar $\{g_{m,n} : m, n \in \mathbf{Z}\}$ membentuk suatu basis ortonormal untuk $L^2(\mathbf{R})$.

Teorema C (Teorema Balian-Low). Misalkan $g \in L^2(\mathbf{R})$ dan

$$g_{m,n}(x) := e^{2\pi i m x} g(x - n), \quad m, n \in \mathbf{Z}.$$

Jika $\{g_{m,n} : m, n \in \mathbf{Z}\}$ membentuk suatu basis ortonormal untuk $L^2(\mathbf{R})$, maka

$$\int_{\mathbf{R}} x^2 |g(x)|^2 dx = \infty \quad \text{atau} \quad \int_{\mathbf{R}} \xi^2 |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi = \infty.$$

Bukti. Lihat buku Hernandez & Weiss.

Contoh 2. $g(x) := \frac{\sin \pi x}{\pi x}$ memenuhi syarat perlu Teorema Balian-Low. Dalam hal ini, integral pertama yang tak terhingga.

Contoh 3. $g := \chi_{[0,1)}$ juga memenuhi syarat perlu Teorema Balian-Low. Dalam hal ini, integral kedua yang tak terhingga.

Sebagai akibat dari Teorema Balian-Low, kita tidak mungkin menemukan fungsi g yang cukup mulus dan mempunyai *tumpuan* kompak sedemikian sehingga $\{e^{2\pi imx}g(x-n) : m, n \in \mathbf{Z}\}$ membentuk basis ortonormal untuk $L^2(\mathbf{R})$, karena kedua integral di atas akan bernilai terhingga. Namun demikian, secara lokal, kita dapat mencari g yang cukup mulus dan mempunyai tumpuan kompak sedemikian sehingga $\{e^{2\pi imx}g(x) : m \in \mathbf{Z}\}$ membentuk sistem ortonormal. Fungsi g demikian disebut *fungsi bel*.

15.4 Soal latihan

- Misalkan $\psi(x) := \frac{\sin 2\pi x - \sin \pi x}{\pi x}$ dan $\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$, $j, k \in \mathbf{Z}$. Buktikan bahwa
 - $\widehat{\psi}(\xi) = \chi_I(\xi)$ dengan $I := [-2\pi, -\pi] \cup [\pi, 2\pi]$.
 - $\widehat{\psi}_{j,k}(\xi) = 2^{-j/2}e^{-i2^{-j}\xi k}\widehat{\psi}(2^{-j}\xi)$.
- Buktikan bahwa wavelet Shannon yang dibahas pada §15.2 memenuhi syarat perlu (1) dan (3).
- Periksa bahwa $g(x) := \chi_{[0,1)}$ memenuhi syarat perlu Teorema Balian-Low.

16. Analisis Multi-Resolusi

Sifat mendasar dari basis ortonormal yang dibangun oleh sebuah wavelet adalah sifat *multi-resolusi*-nya, sehingga kita dapat menganalisis suatu signal pada berbagai frekuensi dan lokasi sekaligus.

Di bawah ini kita akan membahas apa yang dimaksud dengan *analisis multi-resolusi* dan bagaimana mengkonstruksi sebuah wavelet dari suatu analisis multi-resolusi.

16.1 Analisis Multi-Resolusi

Keluarga subruang tertutup $\{V_j : j \in \mathbf{Z}\}$ dari $L^2(\mathbf{R})$ yang memenuhi

- (a) $V_j \subset V_{j+1}$ untuk setiap $j \in \mathbf{Z}$;
- (b) $f \in V_j \Leftrightarrow f(2\cdot) \in V_{j+1}$ untuk setiap $j \in \mathbf{Z}$;
- (c) $\bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \{0\}$;
- (d) $\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j = L^2(\mathbf{R})$;
- (e) terdapat $\phi \in V_0$ sedemikian sehingga $\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ merupakan basis ortonormal untuk V_0 ,

disebut *analisis multi-resolusi (AMR)* pada $L^2(\mathbf{R})$. Fungsi ϕ pada (e) disebut *fungsi skala* dalam AMR tersebut.

Contoh 1. Misalkan $V_j := \{f \in L^2(\mathbf{R}) : f \text{ konstan pada } [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)), k \in \mathbf{Z}\}$, $j \in \mathbf{Z}$. Maka, $\{V_j : j \in \mathbf{Z}\}$ memenuhi sifat (a) s/d (d) di atas. Sekarang misalkan $\phi := \chi_{[0,1]}$. Maka, $\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ membentuk basis ortonormal untuk V_0 . Oleh karena itu, $\{V_j : j \in \mathbf{Z}\}$ merupakan suatu AMR pada $L^2(\mathbf{R})$.

Untuk ilustrasi, fungsi $f \in V_0$ berbentuk seperti — misalnya:



Gambar 16.1: Sebuah fungsi di V_0

Teorema A. Misalkan $\{V_j : j \in \mathbf{Z}\}$ suatu AMR pada $L^2(\mathbf{R})$. Maka,

- (i) Untuk setiap $j \in \mathbf{Z}$, $f \in V_0 \Leftrightarrow f(2^j \cdot) \in V_j$;
- (ii) Untuk setiap $k \in \mathbf{Z}$, $f \in V_0 \Rightarrow f(\cdot - k) \in V_0$;
- (iii) Untuk setiap $j, k \in \mathbf{Z}$, $f \in V_j \Rightarrow f(\cdot - 2^{-j}k) \in V_j$;
- (iv) Untuk setiap $j, k \in \mathbf{Z}$, $f \in V_0 \Rightarrow f(2^j \cdot - k) \in V_j$.

Bukti. (i) Gunakan sifat (b) dan induksi.

(ii) Misalkan $f \in V_0$ dan $k \in \mathbf{Z}$. Maka, berdasarkan sifat (e),

$$f(x) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} \langle f, \phi(\cdot - m) \rangle \phi(x - m),$$

dan karenanya

$$f(x - k) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} \langle f, \phi(\cdot - m) \rangle \phi(x - k - m).$$

Namun, $\langle f, \phi(\cdot - m) \rangle = \langle f(\cdot - k), \phi(\cdot - k - m) \rangle$. Akibatnya,

$$f(x - k) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} \langle f(\cdot - k), \phi(\cdot - k - m) \rangle \phi(x - k - m) \in V_0$$

karena $\{\phi(\cdot - m) : m \in \mathbf{Z}\} = \{\phi(\cdot - k - m) : m \in \mathbf{Z}\}$ basis ortonormal untuk V_0 .

(iii) Gunakan (i) dan (ii).

(iv) Gunakan (i) dan (iii). [QED]

Akibat B. Misalkan $\{V_j : j \in \mathbf{Z}\}$ suatu AMR pada $L^2(\mathbf{R})$ dan $\phi \in V_0$ fungsi skala dalam AMR tersebut. Definisikan

$$\phi_{j,k}(x) := 2^{j/2} \phi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbf{Z}.$$

Maka, untuk setiap $j \in \mathbf{Z}$, $\{\phi_{j,k} : k \in \mathbf{Z}\}$ merupakan basis ortonormal untuk V_j .

Bukti. Misalkan $j \in \mathbf{Z}$. Maka, $\{\phi_{j,k} : k \in \mathbf{Z}\}$ merupakan himpunan ortonormal, karena

$$\langle \phi_{j,k}, \phi_{j,m} \rangle = 2^j \int_{\mathbf{R}} \phi(2^j x - k) \phi(2^j x - m) dx = \int_{\mathbf{R}} \phi(x - k) \phi(x - m) dx = \delta_{k,m}.$$

Selanjutnya, misalkan $f \in V_j$. Maka, $f(2^{-j}\cdot) \in V_0$, dan karenanya

$$f(2^{-j}x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \langle f(2^{-j}\cdot), \phi(\cdot - k) \rangle \phi(x - k).$$

Substitusi $x' = 2^{-j}x$ memberikan

$$f(x') = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \langle f, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k}(x').$$

Ini membuktikan bahwa $\{\phi_{j,k} : k \in \mathbf{Z}\}$ lengkap. Dengan demikian $\{\phi_{j,k} : k \in \mathbf{Z}\}$ merupakan basis ortonormal untuk V_j . [QED]

16.2 Konstruksi wavelet

Misalkan $\{V_j : j \in \mathbf{Z}\}$ suatu AMR pada $L^2(\mathbf{R})$. Misalkan W_0 komplement ortogonal dari V_0 relatif terhadap V_1 , sehingga

$$V_1 = V_0 \oplus W_0.$$

Kemudian, untuk setiap $j \in \mathbf{Z}$, definisikan

$$W_j := \{f(2^j\cdot) : f \in W_0\}.$$

Maka,

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad j \in \mathbf{Z}.$$

Karena $V_j \rightarrow \{0\}$ untuk $j \rightarrow -\infty$, kita peroleh

$$V_{j+1} = \bigoplus_{n=-\infty}^j W_n, \quad j \in \mathbf{Z};$$

dan karena $V_j \rightarrow L^2(\mathbf{R})$ untuk $j \rightarrow \infty$, kita peroleh

$$L^2(\mathbf{R}) = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} W_n.$$

Untuk memperoleh wavelet, yang perlu kita lakukan adalah mencari $\psi \in W_0$ sedemikian sehingga $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ merupakan basis ortonormal untuk W_0 . Selanjutnya dapat diperiksa bahwa untuk setiap $j \in \mathbf{Z}$, $\{2^{j/2}\psi(2^j \cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ membentuk basis ortonormal untuk W_j . Dengan demikian, $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbf{Z}\}$ merupakan basis ortonormal untuk $L^2(\mathbf{R})$ atau ψ adalah wavelet yang diinginkan.

Contoh 2. Melanjutkan Contoh 1, wavelet ψ yang kita cari adalah

$$\psi(x) := \begin{cases} 1, & \text{jika } 0 \leq x < \frac{1}{2}; \\ -1, & \text{jika } \frac{1}{2} \leq x < 1; \\ 0, & \text{jika } x < 0 \text{ atau } x \geq 1. \end{cases}$$

Periksa bahwa $\phi \perp \psi$ dan $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ merupakan basis ortonormal untuk W_0 . Basis yang dibangun oleh ψ tak lain adalah basis Haar yang dibahas pada Bab 10.

16.3 Wavelet bertumpuan kompak dan kemulusannya

Wavelet Haar merupakan sebuah contoh wavelet yang mempunyai tumpuan kompak, yakni $[0, 1]$. Pada pasal ini kita akan melihat bahwa wavelet bertumpuan kompak tak mungkin merupakan fungsi C^∞ ; semulus-mulusnya ia hanya dapat merupakan fungsi di C^n untuk suatu n yang terhingga.

Teorema C. Misalkan ψ kontinu pada \mathbf{R} dan memenuhi

$$|\psi(x)| \leq \frac{C}{(1 + |x|)^{1+\epsilon}}$$

untuk suatu $\epsilon > 0$. Jika $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbf{Z}\}$ ortonormal di $L^2(\mathbf{R})$, maka

$$\int_{\mathbf{R}} \psi(x) dx = 0.$$

Bukti. Misalkan $a := 2^{-j_0} k_0$, suatu bilangan diadik, sedemikian sehingga $\psi(a) \neq 0$. [Karena $\|\psi\|_2 = 1$ dan ψ kontinu, bilangan a demikian dijamin ada.] Berdasarkan hipotesis, kita mempunyai

$$\int_{\mathbf{R}} \overline{\psi(x)} \psi(2^j x - k) dx = 0, \quad (j, k) \neq (0, 0).$$

Dengan mengambil $k := 2^{j-j_0} k_0$ dengan $j > \max\{j_0, 0\}$, kesamaan di atas menjadi

$$\int_{\mathbf{R}} \overline{\psi(x)} \psi(2^j(x - a)) dx = 0.$$

Sekarang misalkan $y := 2^j(x - a)$. Maka

$$\int_{\mathbf{R}} \overline{\psi(a + 2^{-j}y)} \psi(y) dy = 0.$$

Menurut hipotesis, ψ terintegralkan pada \mathbf{R} . Karena itu, berdasarkan Teorema Kekonvergenan Terdominasi Lebesgue, integral di ruas kiri menuju $\overline{\psi(a)} \int_{\mathbf{R}} \psi(y) dy$ bila $j \rightarrow \infty$, sehingga kita peroleh

$$\int_{\mathbf{R}} \psi(y) dy = 0$$

karena $\psi(a) \neq 0$. [QED]

Catatan. Teorema di atas dapat diperluas dengan menghapuskan asumsi bahwa ψ kontinu, namun buktinya lebih rumit. Lihat buku Hernandez & Weiss, Proposisi 3.6.

Teorema D. Misalkan r suatu bilangan bulat tak negatif dan ψ sebuah fungsi di $C^r(\mathbf{R})$ sedemikian sehingga

$$|\psi(x)| \leq \frac{C}{(1 + |x|)^{r+1+\epsilon}}$$

untuk suatu $\epsilon > 0$, dan $\psi^{(m)}$ terbatas pada \mathbf{R} untuk $m = 0, 1, \dots, r$. Jika $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbf{Z}\}$ ortonormal di $L^2(\mathbf{R})$, maka

$$\int_{\mathbf{R}} x^m \psi(x) dx = 0,$$

yakni, momen ke- m dari ψ bernilai 0, untuk $m = 0, 1, \dots, r$.

Bukti. Lihat buku Hernandez & Weiss.

Akibat E. Misalkan $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ sebuah fungsi Schwartz sedemikian sehingga $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbf{Z}\}$ merupakan himpunan ortonormal di $L^2(\mathbf{R})$. Maka semua momen dari ψ bernilai 0 atau, setara dengan itu, $\frac{d^m \hat{\psi}}{d\xi^m}(0) = 0$ untuk setiap $m = 0, 1, 2, \dots$

Bukti. Jelas, karena setiap fungsi Schwartz merupakan fungsi C^∞ dan memenuhi ketaksamaan pada teorema di atas untuk setiap bilangan bulat tak negatif r , dan $\frac{d^m \hat{\psi}}{d\xi^m}(0) = (-2\pi i)^m \int_{\mathbf{R}} x^m \psi(x) dx$ untuk setiap $m = 0, 1, 2, \dots$ [QED]

Akibat F. Misalkan $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ sebuah fungsi bertumpuan kompak sedemikian sehingga C^∞ . Maka $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbf{Z}\}$ tidak mungkin merupakan himpunan ortonormal di $L^2(\mathbf{R})$.

Bukti. Jika $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbf{Z}\}$ merupakan himpunan ortonormal di $L^2(\mathbf{R})$, maka menurut teorema di atas semua momen dari ψ bernilai 0. Karena itu untuk semua polinom $p(x)$, kita mempunyai

$$\int_{\mathbf{R}} p(x) \overline{\psi(x)} dx = 0.$$

Karena ψ bertumpuan kompak, diberikan $\epsilon > 0$ kita dapat menemukan suatu polinom $p(x)$ sedemikian sehingga $\sup_{x \in K} |\psi(x) - p(x)| < \epsilon$, dengan K menyatakan tumpuan ψ (berdasarkan Teorema Aproksimasi Weierstrass). Akibatnya

$$\begin{aligned} \|\psi\|^2 &= \int_{\mathbf{R}} \psi(x) \overline{\psi(x)} dx = \int_K [\psi(x) - p(x)] \overline{\psi(x)} dx \\ &\leq \epsilon \int_K |\psi(x)| dx = \epsilon \|\psi\|_1. \end{aligned}$$

Mengingat $\|\psi\|_1 < \infty$ dan $\epsilon > 0$ sebarang, kita haruslah mempunyai $\|\psi\|_2^2 = 0$, yang bertentangan dengan keortonormalan $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbf{Z}\}$. [QED]

16.4 Teorema sampling

Teorema di bawah ini merupakan bentuk lain dari Teorema Sampling Shannon yang dibahas pada §12.3.

Teorema G. Misalkan $V_j = \{f \in L^2(\mathbf{R}) : f \text{ konstan pada } [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)), k \in \mathbf{Z}\}$, $j \in \mathbf{Z}$ dan $\phi = \chi_{[0,1]}$. Maka, untuk setiap $f \in V_j$, berlaku

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} f(2^{-j}k) \phi(2^j x - k).$$

Bukti. Kita tahu bahwa $\{V_j\}$ merupakan suatu AMR pada $L^2(\mathbf{R})$ dan ϕ fungsi skala, yakni $\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ membentuk basis ortonormal untuk V_0 . Selanjutnya, keluarga fungsi $\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k)$, $j, k \in \mathbf{Z}$ membentuk basis ortonormal untuk V_j . Karena itu, untuk setiap $f \in V_j$, berlaku

$$f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \langle f, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k},$$

dengan

$$\begin{aligned}
 \langle f, \phi_{j,k} \rangle &= 2^{j/2} \int_{\mathbf{R}} f(x) \phi(2^j x - k) dx \\
 &= 2^{j/2} \int_{2^{-j}k}^{2^{-j}(k+1)} f(x) dx \\
 &= 2^{j/2} \int_{2^{-j}k}^{2^{-j}(k+1)} f(2^{-j}k) dx \\
 &= 2^{-j/2} f(2^{-j}k),
 \end{aligned}$$

sesuai dengan yang dinyatakan. [QED]

Teorema H. Misalkan $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbf{Z}\}$ basis ortonormal yang diperoleh dari wavelet ψ . Maka,

$$f = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \sum_{k \in \mathbf{Z}} (f * \tilde{\psi}_{j,0})(2^{-j}k) \psi_{j,k}$$

dalam norma $L^2(\mathbf{R})$. (Di sini, $\tilde{g}(x) = \overline{g(-x)}$.)

Bukti. Tuliskan

$$f = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}.$$

Namun,

$$\begin{aligned}
 \langle f, \psi_{j,k} \rangle &= \int_{\mathbf{R}} f(x) \overline{\psi_{j,k}(x)} dx \\
 &= \int_{\mathbf{R}} f(x) 2^{j/2} \overline{\psi(2^j x - k)} dx \\
 &= \int_{\mathbf{R}} f(x) \overline{\psi_{j,0}(x - 2^{-j}k)} dx \\
 &= \int_{\mathbf{R}} f(x) \tilde{\psi}_{j,0}(2^{-j}k - x) dx \\
 &= f * \tilde{\psi}_{j,0}(2^{-j}k).
 \end{aligned}$$

Jadi,

$$f = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \sum_{k \in \mathbf{Z}} (f * \tilde{\psi}_{j,0})(2^{-j}k) \psi_{j,k},$$

seperti yang diinginkan. [QED]

16.5 Soal latihan

1. Misalkan $\{V_j\}$ suatu AMR pada $L^2(\mathbf{R})$. Buktikan bahwa $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$, $j \in \mathbf{Z}$.

2. Buktikan jika $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ merupakan basis ortonormal untuk W_0 , maka untuk setiap $j \in \mathbf{Z}$, $\{2^{j/2}\psi(2^j \cdot -k) : k \in \mathbf{Z}\}$ merupakan basis ortonormal untuk W_j .
3. Tunjukkan jika ψ merupakan fungsi kontinu yang bertumpuan kompak pada \mathbf{R} , maka ψ memenuhi ketaksamaan

$$|\psi(x)| \leq \frac{C}{(1 + |x|)^r}$$

untuk $r = 1, 2, 3, \dots$ sembarang.

4. Misalkan $\phi \in L^2(\mathbf{R})$. Buktikan bahwa $\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ merupakan himpunan ortonormal jika dan hanya jika

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\widehat{\phi}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1$$

hampir untuk setiap $\xi \in \mathbf{R}$. (*Petunjuk:* Gunakan Kesamaan Plancherel dan sifat transformasi Fourier yang terkait dengan translasi.)

17. Transformasi Wavelet Kontinu dan ‘Rangka’

Pada Bab 16 kita mempelajari basis ortonormal $\{e^{2\pi imx}g(x-n) : m, n \in \mathbf{Z}\}$ dengan $g = \chi_{[0,1]}$. Terkait dengan basis ini, transformasi

$$f \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(x)g(x-n)e^{-2\pi imx} dx, \quad m, n \in \mathbf{Z},$$

dikenal sebagai *transformasi Fourier jendela*. Dalam versi kontinu, transformasi ini beraksi sebagai berikut

$$f \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(x)g(x-\tau)e^{-2\pi i\xi x} dx, \quad \xi, \tau \in \mathbf{R}.$$

(ξ menyatakan frekuensi, τ menyatakan waktu.) Transformasi Fourier jendela dapat dipakai untuk menganalisis waktu dan frekuensi suatu signal.

Pada bab ini, kita akan mempelajari transformasi wavelet kontinu dan konsep rangka (Ing. *frame*). Sebagian besar materi yang dibahas di sini disadur dari buku “Ten Lectures on Wavelets” karangan I. Daubechies (SIAM, 1992).

17.1 Transformasi wavelet kontinu dan kesamaan resolusi

Lebar jendela yang seragam (= $\text{supp } g$) merupakan suatu kelemahan pada transformasi Fourier jendela. Untuk mengatasi kendala tersebut, kita gunakan keluarga fungsi

$$\psi_{a,b}(x) = |a|^{-1/2}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbf{R}, \quad a \neq 0,$$

di mana ψ memenuhi persyaratan tertentu (di sini ψ juga disebut *wavelet*, namun berbeda dengan wavelet ortonormal yang dibahas pada Bab 15). *Transformasi wavelet (kontinu)* dalam hal ini bekerja sebagai berikut

$$f \mapsto |a|^{-1/2} \int_{\mathbf{R}} f(x)\overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)} dx, \quad a, b \in \mathbf{R}, \quad a \neq 0;$$

dan dalam versi diskrit

$$f \mapsto a_0^{j/2} \int_{\mathbf{R}} f(x) \overline{\psi(a_0^j x - kb_0)} dx, \quad j, k \in \mathbf{Z},$$

untuk suatu $a_0 > 1$ dan $b_0 > 0$ (sebagai contoh ambil, misalnya, $a_0 = 2$ dan $b_0 = 1$).

Salah satu kelebihan transformasi wavelet adalah sifat keluarga fungsi $\psi_{a,b}$ yang mempunyai jendela lebar untuk menganalisis frekuensi rendah dan pada saat yang sama mempunyai jendela sempit untuk menganalisis frekuensi tinggi.

Untuk selanjutnya, asumsikan bahwa $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ sedemikian sehingga $\|\psi\| = 1$ dan

$$C_\psi = \int_{\mathbf{R}} |\widehat{\psi}(\xi)|^2 |\xi|^{-1} d\xi < \infty,$$

yang merupakan syarat yang harus dipenuhi oleh ψ untuk menjadi wavelet. (Jika $\psi \in L^1(\mathbf{R})$, maka ψ kontinu. Dalam hal ini syarat di atas akan dipenuhi hanya jika $\widehat{\psi}(0) = 0$, yakni hanya jika $\int_{\mathbf{R}} \psi(x) dx = 0$. Sebaliknya, jika $\int_{\mathbf{R}} \psi(x) dx = 0$ dan, misalnya, $\int_{\mathbf{R}} (1 + |x|)^\alpha |\psi(x)| dx < \infty$ untuk suatu $\alpha > 0$, maka ψ akan memenuhi persyaratan di atas.)

Untuk kemudahan notasi, kita tuliskan transformasi wavelet dari f sebagai

$$Wf(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = |a|^{-1/2} \int_{\mathbf{R}} f(x) \overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)} dx.$$

Catat bahwa $|Wf(a, b)| \leq \|f\|$ menurut ketaksamaan Cauchy-Schwarz.

Fungsi f dapat direkonstruksi dari transformasi waveletnya melalui kesamaan resolusi di bawah ini.

Teorema A (Kesamaan resolusi) Untuk setiap $f, g \in L^2(\mathbf{R})$ berlaku

$$\int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} Wf(a, b) \overline{Wg(a, b)} a^{-2} da db = C_\psi \langle f, g \rangle.$$

Bukti. Untuk setiap $f, g \in L^2(\mathbf{R})$, kita mempunyai

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} Wf(a, b) \overline{Wg(a, b)} a^{-2} da db &= \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \widehat{f}(\xi) |a|^{1/2} e^{ib\xi} \overline{\widehat{\psi}(a\xi)} d\xi \right] \times \\ &\quad \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \overline{\widehat{g}(\xi')} |a|^{1/2} e^{-ib\xi'} \widehat{\psi}(a\xi') d\xi' \right] a^{-2} da db. \end{aligned}$$

Suku pertama dalam kurung siku dapat dipandang sebagai invers transformasi Fourier dari $F_a(\xi) = |a|^{1/2} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{\psi}(a\xi)}$; sementara suku kedua sebagai konjugasi dari invers transformasi Fourier dari $G_a(\xi) = |a|^{1/2} \widehat{g}(\xi) \overline{\widehat{\psi}(a\xi)}$.

Berdasarkan Teorema Fubini dan kesamaan Plancherel, kita peroleh

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} Wf(a, b) \overline{Wg(a, b)} a^{-2} da db &= \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} \check{F}_a(b) \overline{\check{G}_a(b)} db a^{-2} da \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} F_a(\xi) \overline{G_a(\xi)} d\xi a^{-2} da \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} |\widehat{\psi}(a\xi)|^2 d\xi |a|^{-1} da \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} |\widehat{\psi}(a\xi)|^2 |a|^{-1} da \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi \\ &= C_\psi \langle f, g \rangle. \end{aligned}$$

(Substitusi $\zeta = a\xi$ dilakukan untuk memperoleh C_ψ pada langkah terakhir.) [QED]

Catatan. Menggunakan kesamaan resolusi di atas, kita dapat merekonstruksi f melalui

$$f(x) = C_\psi^{-1} \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} Wf(a, b) \psi_{a,b}(x) a^{-2} da db,$$

setidaknya secara lemah.

Sebagai kasus khusus dari Kesamaan Resolusi, yaitu ketika $f = g$, kita mempunyai

$$\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^2 dx = C_\psi^{-1} \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} |Wf(a, b)|^2 a^{-2} da db.$$

Dalam perkataan lain, W memetakan $L^2(\mathbf{R})$ secara isometrik ke $L^2(\mathbf{R}^2; C_\psi^{-1} a^{-2} da db)$ (ruang semua fungsi kompleks F pada \mathbf{R}^2 dengan $\|F\|^2 = C_\psi^{-1} \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} |F(a, b)|^2 a^{-2} da db < \infty$). Ruang $L^2(\mathbf{R}^2; C_\psi^{-1} a^{-2} da db)$ yang dilengkapi dengan norma

$$\|F\| = C_\psi^{-1/2} \left[\int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} |F(a, b)|^2 a^{-2} da db \right]^{1/2}$$

merupakan suatu ruang Hilbert. Sementara itu, $WL^2(\mathbf{R}) = \{Wf : f \in L^2(\mathbf{R})\}$ hanya membentuk suatu ruang bagian sejati tertutup dari $L^2(\mathbf{R}^2; C_\psi^{-1} a^{-2} da db)$.

Argumentasi berikut menunjukkan bahwa $WL^2(\mathbf{R})$ merupakan suatu RKHS, yakni $F(a, b) = \langle K(a, b, \cdot, \cdot), F(\cdot, \cdot) \rangle_{L^2(\mathbf{R}^2; C_\psi^{-1} (a')^{-2} da' db')}$ untuk suatu kernel $K(a, b, a', b')$.

Misalkan $F \in WL^2(\mathbf{R})$ dan $f \in L^2(\mathbf{R})$ sedemikian sehingga $Wf = F$. Maka kita mempunyai (dengan menggunakan Teorema Fubini)

$$\begin{aligned}
 F(a, b) &= \langle f, \psi_{a,b} \rangle \\
 &= C_\psi^{-1} \int_{\mathbf{R}} \int_r \int_r Wf(a', b') \psi_{a',b'}(x) (a')^{-2} da' db' \overline{\psi_{a,b}(x)} dx \\
 &= C_\psi^{-1} \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} Wf(a', b') \overline{W\psi_{a,b}(a', b')} (a')^{-2} da' db' \\
 &= C_\psi^{-1} \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} K(a, b; a', b') F(a', b') (a')^{-2} da' db' \\
 &= \langle K(a, b; \cdot, \cdot), F(\cdot, \cdot) \rangle_{L^2(\mathbf{R}^2; C_\psi^{-1} (a')^{-2} da' db')}
 \end{aligned}$$

dengan

$$K(a, b; a', b') = \overline{W\psi_{a,b}(a', b')} = \langle \psi_{a',b'}, \psi_{a,b} \rangle$$

sebagai kernel yang dimaksud.

17.2 Diskritisasi dan rangka

Dalam transformasi wavelet kontinu, kita bekerja dengan keluarga fungsi

$$\psi_{a,b}(x) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0,$$

dengan $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ memenuhi syarat

$$\int_{\mathbf{R}} |\xi|^{-1} |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

Untuk selanjutnya, demi kemudahan, kita akan mengasumsikan $a > 0$, sehingga syarat yang harus dipenuhi oleh ψ menjadi

$$\int_0^\infty |\xi|^{-1} |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

dan

$$\int_{-\infty}^0 |\xi|^{-1} |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

(Syarat ini lebih kuat daripada syarat sebelumnya.)

Dalam prakteknya, kita hanya membatasi a dan b pada sejumlah diskrit nilai, katakan

$$a = a_0^{-j}, \quad b = kb_0 a_0^{-j}, \quad j, k \in \mathbf{Z},$$

untuk suatu $a_0 > 1$ dan $b_0 > 0$ sedemikian sehingga $\psi(x - kb_0), k \in \mathbf{Z}$, ‘menutupi’ seluruh garis bilangan real. Dalam hal ini kita peroleh keluarga fungsi

$$\psi_{j,k}(x) = a_0^{j/2} \psi\left(\frac{x - kb_0 a_0^{-j}}{a_0^{-j}}\right) = a_0^{j/2} \psi(a_0^j x - kb_0), \quad j, k \in \mathbf{Z}.$$

(Perhatikan jika $a_0 = 2$ dan $b_0 = 1$, maka kita dapatkan $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$.)

Pertanyaannya sekarang adalah: apakah kita dapat merekonstruksi f dari koefisien-koefisien $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$, $j, k \in \mathbf{Z}$ (yang stabil secara numerik)? Jawabannya tidak selalu ya karena $\psi_{j,k}, j, k \in \mathbf{Z}$, secara umum tidak membentuk basis ortonormal untuk $L^2(\mathbf{R})$. Walaupun demikian, dalam kasus tertentu, dapat kita peroleh jawaban positif.

Secara umum fungsi f dapat direkonstruksi dari koefisien-koefisien $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$ apabila

$$\langle f, \psi_{j,k} \rangle = \langle g, \psi_{j,k} \rangle \quad \forall j, k \in \mathbf{Z} \Rightarrow f \equiv g.$$

Namun kita ingin lebih daripada itu: kita ingin dapat merekonstruksi f dari koefisien-koefisien $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$ dengan cara yang *stabil secara numerik*.

Pertama, barisan koefisien ($\langle f, \psi_{j,k} \rangle$) harus konvergen untuk setiap $f \in L^2(\mathbf{R})$. Ini tidak menjadi masalah karena pada umumnya kita mempunyai

$$\sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 \leq B \|f\|^2, \quad f \in L^2(\mathbf{R}),$$

untuk suatu $B > 0$. Kedua, persyaratan kestabilan menghendaki jika $\sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2$ kecil, maka $\|f\|$ harus kecil pula. Ini berarti bahwa kita harus mempunyai

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2, \quad f \in L^2(\mathbf{R}),$$

untuk suatu $A > 0$. Jadi, ψ haruslah memenuhi

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 \leq B \|f\|^2, \quad f \in L^2(\mathbf{R}),$$

untuk suatu konstanta A dan B dengan $0 < A \leq B < \infty$.

Sekarang kita sampai pada definisi *rangka*, yang pertama kali diperkenalkan oleh Duffin & Schaeffer (1952) dalam konteks deret Fourier non-harmonik.

Keluarga fungsi $\{\phi_j\}$ dalam ruang Hilbert H disebut *rangka* apabila terdapat konstanta A dan B dengan $0 < A \leq B < \infty$ sedemikian sehingga

$$A\|f\|^2 \leq \sum_j |\langle f, \phi_j \rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad f \in H.$$

Konstanta A dan B disebut *batas* rangka yang bersangkutan. Jika kedua konstanta A dan B sama, maka rangka yang bersangkutan dikatakan *ketat*.

Catatan. Dalam suatu rangka yang ketat, kita mempunyai

$$\sum_j |\langle f, \phi_j \rangle|^2 = A\|f\|^2, \quad f \in H,$$

sehingga (berdasarkan kesamaan polarisasi)

$$A\langle f, g \rangle = \sum_j \langle f, \phi_j \rangle \langle \phi_j, g \rangle$$

atau (secara lemah)

$$f = A^{-1} \sum_j \langle f, \phi_j \rangle \phi_j.$$

Contoh 1. Sebarang basis ortonormal untuk ruang Hilbert H jelas merupakan suatu rangka yang ketat, dengan batas rangka $A = B = 1$. Sebaliknya tidak selalu berlaku. Misalkan $H = \mathbf{R}^2$. Keluarga vektor $\{v_1, v_2, v_3\}$ dengan $v_1 = (0, 1)$, $v_2 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ dan $v_3 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, membentuk suatu rangka yang ketat (periksa bahwa untuk setiap $u = (a, b) \in H$ berlaku $\sum_{j=1}^3 |\langle u, v_j \rangle|^2 = \frac{3}{2}\|u\|^2$), namun jelas bukan merupakan basis ortonormal untuk H .

Fakta B. Jika $\{\phi_j\}$ suatu rangka yang ketat dengan batas rangka $A = 1$ dan $\|\phi_j\| = 1$ untuk setiap j , maka $\{\phi_j\}$ merupakan basis ortonormal.

Bukti. Karena $\{\phi_j\}$ memenuhi Kesamaan Parseval, maka ia lengkap. Selanjutnya kita periksa bahwa untuk setiap k berlaku

$$\|\phi_k\|^2 = \sum_j |\langle \phi_k, \phi_j \rangle|^2 = \|\phi_k\|^4 + \sum_{j \neq k} |\langle \phi_k, \phi_j \rangle|^2.$$

Karena $\|\phi_k\| = 1$, maka $\langle \phi_j, \phi_k \rangle = 0$ untuk setiap $j \neq k$. Jadi, $\{\phi_j\}$ ortonormal. [QED]

17.3 Syarat perlu dan syarat cukup untuk membentuk rangka

Diberikan wavelet ψ , kita lakukan diskritisasi terhadap ψ untuk memperoleh keluarga fungsi $\psi_{j,k}(x) = a_0^{j/2}\psi(a_0^j x - kb_0)$, $j, k \in \mathbf{Z}$. Kemudian, untuk setiap $f \in L^2(\mathbf{R})$, kita dapat membuat kode untuk f berupa barisan koefisien $(\langle f, \psi_{j,k} \rangle)$. Jika $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbf{Z}\}$ membentuk suatu rangka yang ketat, maka kita dapat merekonstruksi f dengan cara yang stabil secara numerik melalui

$$f = A^{-1} \sum_{j,k} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}.$$

Namun, masalahnya, tidak ada jaminan bahwa $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbf{Z}\}$ membentuk rangka (yang ketat).

Syarat perlu bagi $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbf{Z}\}$ untuk membentuk rangka adalah bahwa ψ harus memenuhi persyaratan untuk menjadi wavelet, seperti tersirat dalam teorema di bawah ini.

Teorema C (Syarat perlu untuk membentuk rangka) *Jika $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbf{Z}\}$ membentuk rangka dengan batas rangka A dan B , maka*

$$\frac{b_0 \ln a_0}{2\pi} A \leq \int_0^\infty |\widehat{\psi}(\xi)|^2 |\xi|^{-1} d\xi \leq \frac{b_0 \ln a_0}{2\pi} B$$

dan

$$\frac{b_0 \ln a_0}{2\pi} A \leq \int_{-\infty}^0 |\widehat{\psi}(\xi)|^2 |\xi|^{-1} d\xi \leq \frac{b_0 \ln a_0}{2\pi} B,$$

yakni ψ memenuhi persyaratan untuk menjadi wavelet.

Bukti. Lihat Daubechies.

Walaupun ψ memenuhi persyaratan untuk menjadi wavelet, tidak setiap pemilihan a_0 dan b_0 akan menghasilkan rangka. Syarat cukup bagi ψ agar $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbf{Z}\}$ membentuk rangka diberikan oleh teorema berikut.

Teorema D (Syarat cukup untuk membentuk rangka) *Jika $|\widehat{\psi}(\xi)| \leq C|\xi|^\alpha(1 + |\xi|)^{-\beta}$ untuk suatu $\alpha > 0$ dan $\beta > \alpha + 1$, maka terdapat a_0 dan $b_0 > 0$ sedemikian sehingga $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbf{Z}\}$ membentuk rangka.*

Bukti. Lihat Daubechies.

Contoh 2. Fungsi topi Meksiko

$$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi^{-1/4}(1-x^2)e^{-x^2/2},$$

yang merupakan turunan kedua yang ternormalisasi dari fungsi Gauss $G(x) = e^{-x^2/2}$, dapat menghasilkan suatu rangka dengan rasio batas rangka $B/A \approx 1$ untuk $a_0 \leq 2^{1/4}$. Namun, untuk $a_0 = 2$, rasio B/A agak jauh dari 1 seperti yang ditunjukkan oleh tabel di bawah ini (dicuplik dari Daubechies). Ini terjadi karena amplitudo osilasi $\sum_{j \in \mathbf{Z}} |\widehat{\psi}(2^j \xi)|^2$ terlalu besar.

b_0	.25	.50	.75	1.00	1.50
B/A	1.083	1.083	1.083	1.116	12.986

Untuk memperoleh rangka yang ketat, kita harus menggunakan sejumlah N wavelet berbeda ψ^1, \dots, ψ^N (misalnya dengan memilih $\psi^i(x) = 2^{-(i-1)/N} \psi(2^{-(i-1)/N} x)$, $i = 1, \dots, N$), kemudian bekerja dengan rangka $\{\psi_{j,k}^i : i = 1, \dots, N; j, k \in \mathbf{Z}\}$. (Ini dapat diinterpretasikan sebagai menggunakan N suara per oktaf.) Untuk $N = 3$, misalnya, kita mempunyai tabel di bawah ini (dicuplik dari Daubechies):

b_0	.25	.50	.75	1.00	1.50
B/A	1.000	1.000	1.000	1.010	1.947

17.4 Soal latihan

1. Misalkan $\psi \in L^1(\mathbf{R})$. Tunjukkan bahwa $\widehat{\psi}(0) = 0$ jika dan hanya jika $\int_{\mathbf{R}} \psi(x) dx = 0$. Apa interpretasi anda tentang ψ dalam hal ini?
2. Tunjukkan jika $\int_{\mathbf{R}} \psi(x) dx = 0$ dan $\int_{\mathbf{R}} (1+|x|)^\alpha |\psi(x)| dx < \infty$ untuk suatu $\alpha > 0$, maka $\int_{\mathbf{R}} |\widehat{\psi}(\xi)|^2 |\xi|^{-1} d\xi < \infty$.
3. Tunjukkan bahwa $\int_{\mathbf{R}} |\widehat{\psi}(a\xi)|^2 |a|^{-1} da = \int_{\mathbf{R}} |\widehat{\psi}(\zeta)|^2 |\zeta|^{-1} d\zeta$. (Gunakan substitusi $\zeta = a\xi$.)
4. Turunkan/peroleh syarat yang harus dipenuhi oleh ψ untuk menjadi wavelet dalam hal $a > 0$, yakni

$$\int_0^\infty |\xi|^{-1} |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi < \infty \quad \text{dan} \quad \int_{-\infty}^0 |\xi|^{-1} |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

5. Misalkan $\{\phi_j\}$ merupakan rangka yang ketat di ruang Hilbert H , yakni

$$A\|f\|^2 = \sum_j |\langle f, \phi_j \rangle|^2, \quad \forall f \in H.$$

Buktikan bahwa

$$A\langle f, g \rangle = \sum_j \langle f, \phi_j \rangle \langle \phi_j, g \rangle, \quad \forall f, g \in H.$$

6. Tunjukkan bahwa keluarga vektor $\{(0, 1), (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}), (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})\}$ membentuk suatu rangka yang ketat di \mathbf{R}^2 .
7. Diketahui fungsi Gauss $G(x) = e^{-x^2/2}$, tentukan $G''(x)$, $\|G''\|$, dan $\psi(x) = \frac{G''(x)}{\|G''\|}$.

18. Lebih Jauh tentang Rangka

Kita akan membahas rangka lebih jauh, khususnya bagaimana ia digunakan untuk merepresentasikan fungsi dan bagaimana kita dapat merekonstruksi fungsi itu kembali (dari rangka) dengan lebih baik. Materi pada bab ini juga disadur dari buku "Ten Lectures on Wavelets" karangan I. Daubechies (SIAM, 1992).

18.1 Operator rangka

Misalkan H ruang Hilbert dan $\{\phi_j : j \in J\}$ suatu rangka di H , yakni terdapat $A, B \in \mathbf{R}$ dengan $0 < A \leq B < \infty$ sedemikian sehingga

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j \in J} |\langle f, \phi_j \rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad f \in H.$$

Kita definisikan operator rangka F sebagai berikut: Operator F yang memetakan setiap fungsi $f \in H$ ke barisan $(\langle f, \phi_j \rangle)_{j \in J} \in l^2(J)$, yakni $F : f \mapsto Ff$ dengan

$$(Ff)_j = \langle f, \phi_j \rangle, \quad j \in J,$$

disebut *operator rangka* pada H .

Misalkan F suatu operator rangka pada H . Jelas bahwa F merupakan operator linear. F juga terbatas dengan $\|F\| \leq B^{1/2}$, karena

$$\|Ff\|^2 = \sum_{j \in J} |\langle f, \phi_j \rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad f \in H.$$

(Di sini $\|F\|$ menyatakan *norma operator* F , yang nilainya sama dengan konstanta C terkecil yang memenuhi $\|Ff\| \leq C\|f\|$, $f \in H$.) Selanjutnya, operator adjoint F , yakni F^* , dapat diperoleh sebagai berikut. Misalkan $c = (c_j)_{j \in J} \in l^2(J)$. Maka

$$\begin{aligned} \langle F^*c, f \rangle &= \langle c, Ff \rangle = \sum_{j \in J} c_j \overline{\langle f, \phi_j \rangle} \\ &= \sum_{j \in J} c_j \langle \phi_j, f \rangle = \left\langle \sum_{j \in J} c_j \phi_j, f \right\rangle \end{aligned}$$

Jadi, $F^*c = \sum_{j \in J} c_j \phi_j$, setidaknya secara lemah. Selanjutnya, mengingat $\|F^*\| = \|F\|$ (lihat Kreyszig) dan $\|F\| \leq B^{1/2}$, kita peroleh

$$\|F^*c\| \leq \|F^*\| \|c\| = \|F\| \|c\| \leq B^{1/2} \|c\|, \quad c \in l^2(J).$$

Sekarang tinjau operator F^*F , yang bekerja pada H sebagai berikut:

$$F^*Ff = F^*(\langle f, \phi_j \rangle) = \sum_{j \in J} \langle f, \phi_j \rangle \phi_j, \quad f \in H.$$

Teorema A. Misalkan \mathbf{I} menyatakan operator identitas pada H . Maka,

$$A\mathbf{I} \leq F^*F \leq B\mathbf{I},$$

sehingga F^*F mempunyai invers, dan

$$B^{-1}\mathbf{I} \leq (F^*F)^{-1} \leq A^{-1}\mathbf{I}.$$

Bukti. Untuk setiap $f \in H$, kita mempunyai

$$\sum_{j \in J} |\langle f, \phi_j \rangle|^2 = \|Ff\|^2 = \langle Ff, Ff \rangle = \langle F^*Ff, f \rangle,$$

oleh karena itu,

$$A\mathbf{I} \leq F^*F \leq B\mathbf{I}.$$

Selanjutnya, karena $A > 0$, maka F^*F mempunyai invers, dan

$$B^{-1}\mathbf{I} \leq (F^*F)^{-1} \leq A^{-1}\mathbf{I}$$

(lihat Daubechies untuk detilnya). [QED]

18.2 Rangka dual

Keluarga $\{\tilde{\phi}_j : j \in J\}$, dengan

$$\tilde{\phi}_j = (F^*F)^{-1}\phi_j, \quad j \in J,$$

disebut *rangka dual* dari $\{\phi_j : j \in J\}$.

Teorema di bawah ini menunjukkan bahwa $\{\tilde{\phi}_j : j \in J\}$ sungguh membentuk rangka.

Teorema B. $\{\tilde{\phi}_j : j \in J\}$ merupakan rangka dengan batas rangka B^{-1} dan A^{-1} .

Bukti. Jelas bahwa F^*F self-adjoint, sehingga $((F^*F)^{-1})^* = (F^*F)^{-1}$. Akibatnya, untuk setiap $f \in H$, kita mempunyai

$$\langle f, \tilde{\phi}_j \rangle = \langle f, (F^*F)^{-1}\phi_j \rangle = \langle (F^*F)^{-1}f, \phi_j \rangle.$$

Sekarang perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} |\langle f, \tilde{\phi}_j \rangle|^2 &= \sum_{j \in J} |\langle (F^*F)^{-1}f, \phi_j \rangle|^2 = \|F(F^*F)^{-1}f\|^2 \\ &= \langle F(F^*F)^{-1}f, F(F^*F)^{-1}f \rangle \\ &= \langle (F^*F)^{-1}f, (F^*F)(F^*F)^{-1}f \rangle \\ &= \langle (F^*F)^{-1}f, f \rangle. \end{aligned}$$

Jadi, mengingat $B^{-1}\mathbf{I} \leq (F^*F)^{-1} \leq A^{-1}\mathbf{I}$, kita peroleh

$$B^{-1}\|f\|^2 \leq \sum_{j \in J} |\langle f, \tilde{\phi}_j \rangle|^2 \leq A^{-1}\|f\|^2,$$

sesuai dengan yang diharapkan. [QED]

Teorema C. Operator rangka \tilde{F} yang memetakan setiap fungsi $f \in H$ ke barisan $(\langle f, \tilde{\phi}_j \rangle)_{j \in J}$ di $l^2(J)$ memenuhi

(a) $\tilde{F} = F(F^*F)^{-1}$;

(b) $\tilde{F}^*\tilde{F} = (F^*F)^{-1}$;

(c) $\tilde{F}^*F = \mathbf{I} = F^*\tilde{F}$;

(d) $\tilde{F}F^* = F\tilde{F}^*$ merupakan operator proyeksi ortogonal terhadap $R(F) = R(\tilde{F})$ di $l^2(J)$.

Bukti. Latihan.

18.3 Skema rekonstruksi

Perhatikan bahwa $\tilde{F}^*F = \mathbf{I} = F^*\tilde{F}$ berarti

$$\tilde{F}^*Ff = f = F^*\tilde{F}f, \quad f \in H,$$

yakni

$$\sum_{j \in J} \langle f, \phi_j \rangle \tilde{\phi}_j = f = \sum_{j \in J} \langle f, \tilde{\phi}_j \rangle \phi_j, \quad f \in H.$$

Ini berarti kita dapat merekonstruksi f dari $(\langle f, \phi_j \rangle)_{j \in J}$ melalui kesamaan

$$f = \sum_{j \in J} \langle f, \phi_j \rangle (F^*F)^{-1} \phi_j.$$

Jika $A \approx B$, maka $F^*F \approx \frac{A+B}{2} \mathbf{I}$, sehingga $(F^*F)^{-1} \approx \frac{2}{A+B} \mathbf{I}$ dan $\tilde{\phi}_j \approx \frac{2}{A+B} \phi_j$ untuk setiap $j \in J$. Oleh karena itu, $f \approx \frac{2}{A+B} \sum_{j \in J} \langle f, \phi_j \rangle \phi_j$. Tepatnya,

$$f = \frac{2}{A+B} \sum_{j \in J} \langle f, \phi_j \rangle \phi_j + Ef,$$

dengan

$$E = \mathbf{I} - \frac{2}{A+B} F^*F.$$

Mengingat $A\mathbf{I} \leq F^*F \leq B\mathbf{I}$, kita peroleh

$$-\frac{B-A}{B+A} \mathbf{I} \leq E \leq \frac{B-A}{B+A} \mathbf{I},$$

sehingga

$$\|E\| \leq \frac{B-A}{B+A} = \frac{r}{2+r},$$

dengan $r = \frac{B}{A} - 1 > 0$. Jadi, jika kita menghampiri f dengan $\frac{2}{A+B} \sum_{j \in J} \langle f, \phi_j \rangle \phi_j$, maka kesalahan maksimumnya adalah $\frac{r}{2+r} \|f\|$.

Untuk memperoleh hampiran yang lebih baik, kita amati lebih lanjut bahwa $F^*F = \frac{A+B}{2}(\mathbf{I} - E)$, sehingga $(F^*F)^{-1} = \frac{2}{A+B}(\mathbf{I} - E)^{-1}$. Karena $\|E\| = \frac{r}{2+r} < 1$, maka $\sum_{n=0}^{\infty} E^n$ konvergen dalam norma dan $\sum_{n=0}^{\infty} E^n = (\mathbf{I} - E)^{-1}$. (Di sini $E^0 = \mathbf{I}$.) Jadi, untuk setiap $j \in J$, kita mempunyai

$$\tilde{\phi}_j = (F^*F)^{-1} \phi_j = \frac{2}{A+B} \sum_{n=0}^{\infty} E^n \phi_j,$$

dan karena itu

$$f = \frac{2}{A+B} \sum_{j \in J} \langle f, \phi_j \rangle \sum_{n=0}^{\infty} E^n \phi_j.$$

Hampiran yang lebih baik dapat diperoleh melalui

$$f \approx \frac{2}{A+B} \sum_{j \in J} \langle f, \phi_j \rangle \sum_{n=0}^N E^n \phi_j,$$

untuk suatu $N \in \{0, 1, 2, \dots\}$ yang cukup besar.

Suatu algoritma rekonstruksi f dapat diperoleh dengan menuliskan

$$f = (F^* F)^{-1} (F^* F) f = \lim_{N \rightarrow \infty} f_N$$

dengan

$$\begin{aligned} f_N &= \frac{2}{A+B} \sum_{n=0}^N E^n (F^* F) f \\ &= \frac{2}{A+B} (F^* F) f + \frac{2}{A+B} \sum_{n=1}^N E^n (F^* F) f \\ &= \frac{2}{A+B} (F^* F) f + E f_{N-1} \\ &= \frac{2}{A+B} \sum_{j \in J} \langle f, \phi_j \rangle \phi_j + f_{N-1} - \frac{2}{A+B} \sum_{j \in J} \langle f_{N-1}, \phi_j \rangle \phi_j \\ &= f_{N-1} + \frac{2}{A+B} \sum_{j \in J} (\langle f, \phi_j \rangle - \langle f_{N-1}, \phi_j \rangle) \phi_j. \end{aligned}$$

Jadi, f dapat direkonstruksi secara iteratif, mulai dengan

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{2}{A+B} F^* F f = \frac{2}{A+B} \sum_{j \in J} \langle f, \phi_j \rangle \phi_j, \\ f_1 &= f_0 + \frac{2}{A+B} \sum_{j \in J} (\langle f, \phi_j \rangle - \langle f_0, \phi_j \rangle) \phi_j, \end{aligned}$$

dan seterusnya, sampai memenuhi ketelitian yang diinginkan. Kesalahan maksimumnya diberikan oleh teorema di bawah ini.

Teorema D. Untuk setiap $j \in J$ dan $N \in \{0, 1, 2, \dots\}$, tulis $\tilde{\phi}_j^N = \frac{2}{A+B} \sum_{n=0}^N E^n \phi_j$.

Maka,

$$\left\| f - \sum_{j \in J} \langle f, \phi_j \rangle \tilde{\phi}_j^N \right\| \leq \left(\frac{r}{2+r} \right)^{N+1} \|f\|.$$

Bukti. Latihan.

18.4 Soal latihan

1. Buktikan Teorema C pada §18.2.
2. Tunjukkan bahwa rangka dual dari $\{\tilde{\phi}_j : j \in J\}$ adalah $\{\phi_j : j \in J\}$.
3. Buktikan Teorema D pada §18.3.

19. Penutup

Bila aplikasi deret dan transformasi Fourier telah cukup banyak dibahas, maka berikut ini disajikan ilustrasi bagaimana wavelet Haar digunakan dalam analisis dan pemrosesan signal, khususnya citra digital.

Misalkan kita mempunyai sebuah gambar atau citra (berdimensi dua) yang berukuran 1×1 satuan luas. Secara matematis, gambar ini dapat kita anggap sebagai sebuah fungsi bernilai real yang terdefinisi pada persegi $[0, 1] \times [0, 1]$, dengan nilai di setiap titik menyatakan intensitas warna gambar di titik tersebut. Dengan perkataan lain, setiap titik dalam gambar tersebut kita kaitkan dengan sebuah bilangan yang mengukur intensitas warna di titik tersebut.

Dalam prakteknya, yang biasanya kita lakukan kemudian adalah diskritisasi. Kita bagi persegi $[0, 1] \times [0, 1]$ tadi atas sejumlah persegi kecil, yang kita sebut *pixel*, dan setiap pixel kita kaitkan dengan sebuah bilangan, katakanlah $0, 1, \dots, 255$, yang mewakili warna dominan pada pixel tersebut. Dengan demikian, kita peroleh sebuah matriks, katakanlah berukuran $n \times n$, dengan entri bilangan bulat $0, 1, \dots, 255$. Matriks ini menyajikan sebuah citra digital, yang merupakan hampiran dari citra aslinya.

19.1 Pemrosesan signal 1D

Untuk menganalisis dan memroses citra ini dengan menggunakan wavelet Haar, marilah kita tinjau bagaimana kita berhadapan dengan signal atau “citra” digital berdimensi satu. Misalkan kita mempunyai matriks baris berikut

$$M := [4 \quad 8 \quad 3 \quad 1]$$

Matriks ini dapat dinyatakan sebagai deret Haar

$$M = 4[\phi] + 2[\psi] - 2[\psi_{1,0}] + 1[\psi_{1,1}]$$

dengan

$$\begin{aligned}[\phi] &= [1 & 1 & 1 & 1] \\[\psi] &= [1 & 1 & -1 & -1] \\[\psi_{1,0}] &= [1 & -1 & 0 & 0] \\[\psi_{1,1}] &= [0 & 0 & 1 & -1]\end{aligned}$$

Matriks M menyatakan citra dengan resolusi 4, yang tidak lain merupakan sebuah fungsi pada $[0, 1]$ yang bernilai 4 pada seperempat interval pertama, 8 pada seperempat interval kedua, 3 pada seperempat interval ketiga, dan 1 pada seperempat interval keempat. Matriks $[\phi]$ tidak lain merupakan fungsi ϕ , demikian pula matriks $[\psi]$, $[\psi_{1,0}]$ dan $[\psi_{1,1}]$ menyatakan fungsi ψ , $\psi_{1,0}$ dan $\psi_{1,1}$.

Koefisien Haar pada uraian deret Haar di atas tentunya dapat dihitung dengan rumus yang kita punyai, namun dengan penyajian dalam bentuk matriks koefisien tersebut tentunya dapat pula diperoleh dengan menyelesaikan sistem persamaan linear yang terkait. Cara lainnya berkaitan dengan konsep analisis multi resolusi, yakni dengan perataan dan pencatatan kesalahannya, sebagai berikut.

Diberikan matriks M dengan resolusi 4 seperti di atas, kita hitung rata-rata setiap dua suku sehingga kita peroleh matriks M_1 dengan resolusi 2 di bawah ini

$$M_1 = [6 \quad 2].$$

Matriks M dapat diperoleh kembali dari M_1 melalui

$$M = [6 \quad 6 \quad 2 \quad 2] + [-2 \quad 2 \quad 1 \quad -1].$$

Matriks pertama di ruas kanan merupakan representasi dari M_1 dengan resolusi 4, sementara matriks kedua menyatakan kesalahan pada proses perataan di atas. Perhatikan bahwa matriks kedua di ruas kanan dapat diuraikan lebih lanjut sebagai

$$-2[1 \quad -1 \quad 0 \quad 0] + 1[0 \quad 0 \quad 1 \quad -1].$$

Proses perataan kita lanjutkan sekali lagi terhadap M_1 sehingga kita peroleh matriks M_2 dengan resolusi 1 berikut

$$M_2 = [4]$$

dan kesalahannya

$$[2 \quad -2].$$

Sebagai matriks dengan resolusi 4, M_2 merepresentasikan

$$[4 \quad 4 \quad 4 \quad 4] = 4[1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

sementara kesalahannya

$$[2 \quad 2 \quad -2 \quad -2] = 2[1 \quad 1 \quad -1 \quad -1].$$

Matriks M_1 dapat diperoleh kembali dengan menjumlahkan kedua matriks tersebut, dan M pun dapat diperoleh kembali persis seperti di atas.

19.2 Pemrosesan citra 2D

Sampai di sini kita telah melihat bagaimana menganalisis suatu signal atau citra digital berdimensi satu dengan menggunakan wavelet Haar. Untuk memroses citra tersebut, misalnya menyimpan citra tersebut (secara digital dalam komputer, misalnya) dan mengambilnya kembali suatu saat serta merekonstruksinya, kita cukup menyimpan koefisien Haar-nya. Tetapi, tunggu dulu, apa untungnya menyimpan koefisien Haar-nya? Bukankah banyaknya data (baca: bilangan) yang disimpan akan sama saja banyaknya dengan banyaknya data semula?

Pada contoh di atas, ya. Namun secara umum bila kita berhadapan dengan sebuah citra dengan resolusi 1024×1024 , misalnya, sejumlah koefisien dapat bernilai 0 (ini terjadi misalnya ketika dua bilangan yang berdampingan pada suatu tahap bernilai sama) atau jauh lebih kecil dibandingkan dengan yang lainnya sehingga dapat dianggap 0. Nah, pada saat itulah penghematan tempat penyimpanan (istilah komputer: memori) dapat dilakukan. Bila ini dilakukan, tentunya hasil rekonstruksinya nanti tidak akan sama persis dengan citra semula, tetapi merupakan hampiran.

Citra digital berdimensi dua dapat digarap secara serupa, tentunya dengan menggunakan wavelet berdimensi dua pula, yang pada prinsipnya dapat diperoleh dengan mengambil tensor atau hasil kali wavelet berdimensi satu. Bila wavelet Haar berdimensi dua yang digunakan, proses perataan dan pencatatan kesalahan seperti di atas

tetap dapat dilakukan (tentunya sedikit lebih rumit) dalam tahap analisisnya. Proses penyimpanan dan rekonstruksinya dapat dikatakan sama saja.

Berikut adalah citra digital 'Lena' beserta hasil rekonstruksinya dengan wavelet Haar, dengan 'memangkas' 90% koefisien terkecil. Perhatikan bahwa mata kita hampir tidak dapat membedakan kedua gambar tersebut.



Gambar 19.2: Lena dan rekonstruksinya

Dalam beberapa tahun terakhir, teori wavelet dan aplikasinya telah banyak mengalami kemajuan. Sebagai contoh, pada pemrosesan citra, wavelet telah digunakan pula untuk mengolah citra yang 'rusak' (dalam arti yang luas), misalnya karena buram atau tergores. Puluhan, bahkan ratusan, artikel tentang wavelet dan aplikasinya dapat ditemukan di Internet (misalnya via <http://scholar.google.com>).

Daftar Pustaka

Pustaka Utama

- I. Daubechies (1992), *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS-NSF, Philadelphia, Pennsylvania.
- R.J. Duffin & Schaeffer (1952), "A class of nonharmonic Fourier series", *Trans. Amer. Math. Soc.* **72**, 341-366.
- G.B. Folland (1992), *Fourier Analysis and Its Applications*, Wardsworth & Brooks/Cole, Pacific Grove.
- J. Fourier (1822), *Thorie analytique de la chaleur*, Firmin Didot Pre et Fils, Paris.
- D. Gabor (1946), Theory of communication, *J. Inst. Electr. Eng. (London)* **93**, 429-457.
- A. Haar (1910), "Zur Theorie der orthogonalen Funktionen-systeme", *Math. Ann.* **69**, 331-371.
- E. Hernandez & G. Weiss (1996), *A First Course on Wavelets*, CRC Press, New York.
- E. Hewitt & K. Stromberg (1975), *Real and Abstract Analysis*, Springer-Verlag, New York.
- A.N. Kolmogorov (1926), "Sur une série de Fourier-Lebesgue divergente partout", *Comptes. Rendus. de la Acad. de Paris*.
- W. Rudin (1986), *Real and Complex Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York.
- C.E. Shannon (1949), "Communication in the present of noise", *Proc. of the Inst. of Radio Eng.* **37**, 10-21.

Pustaka Pendukung

- E. Kreyszig (1978), *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons.

Y. Meyer (1992), *Wavelets and Operators*, Cambridge Univ. Press.

Y. Meyer & R. Coifman (1997), *Wavelets: Calderon-Zygmund and Multilinear Operators*, Cambridge Univ. Press.

H.L. Royden (1988), *Real Analysis*, Prentice Hall, New York.

P. Wojtaszczyk (1997), *A Mathematical Introduction to Wavelets*, Cambridge Univ. Press.

N. Young (1988), *An Introduction to Hilbert Spaces*, Cambridge Univ. Press.